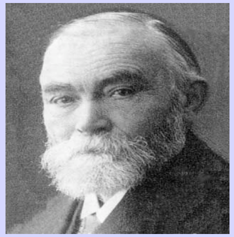


Naive Theory of Sets

Con materiale liberamente scaricabile dal www

Premessa

Nella discussione sui fondamenti della Matematica molte teorie degli insiemi sono state proposte.

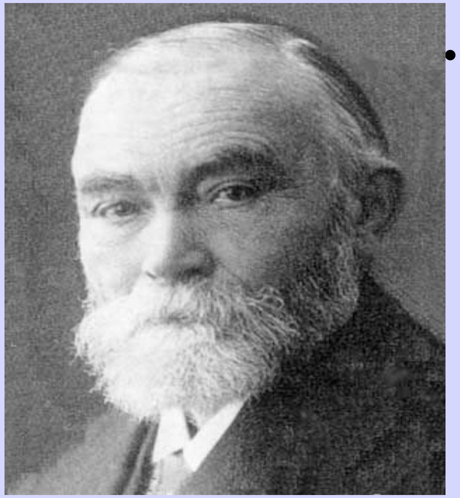
Quella che studiamo a scuola è una versione della cosiddetta Teoria Ingenua degli Insiemi.

*****

Non crediate che si tratti di attività priva di rigore. L'aggettivo trova la sua spiegazione nel fatto che viene usato il linguaggio naturale per parlare di insiemi.

La polemica Frege-Russell

Bertrand Arthur William Russell (1872 – 1970), scrittore, filosofo e matematico britannico, premio Nobel per la letteratura.



- Gottlob Frege (Wismar, 1848 - Bad Kleinen, Meclenburgo, 1925), considerato il fondatore della **logica matematica**, studiò presso l'Università di Jena (1869-1871), successivamente presso l'Università di Gottinga, dove seguì corsi di matematica, fisica, chimica e filosofia. Si laureò in matematica a Gottinga nel 1873, conseguendo l'abilitazione l'anno successivo. Nominato professore presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Jena, vi rimase praticamente per il resto della vita, avendo scarsi contatti con gli studenti e con i colleghi.

IL PARADOSSO DI RUSSEL

Assumiamo che la collezione costituita da tutti gli insiemi sia un insieme U :
U = insieme di tutti gli insiemi.

L'insieme U, avendo come elementi tutti i possibili insiemi, contiene se stesso come elemento; cioé $U \in U$.

Per ogni insieme A, risulta $A \in A$ oppure $A \notin A$.

E', dunque, possibile definire l'insieme P di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come elemento, cioè:

P = { insiemi A tali che $A \notin A$ } .

Per l'insieme P si ha:

$P \in P$ implica che $P \notin P$ e $P \notin P$ implica che $P \in P$

il che è evidentemente assurdo!

Cos'è infine un insieme?

- Nella teoria ingenua degli insiemi è quindi, una collezione di oggetti che godono di una stessa proprietà

Assumiamo come primitivi i concetti di

elemento,

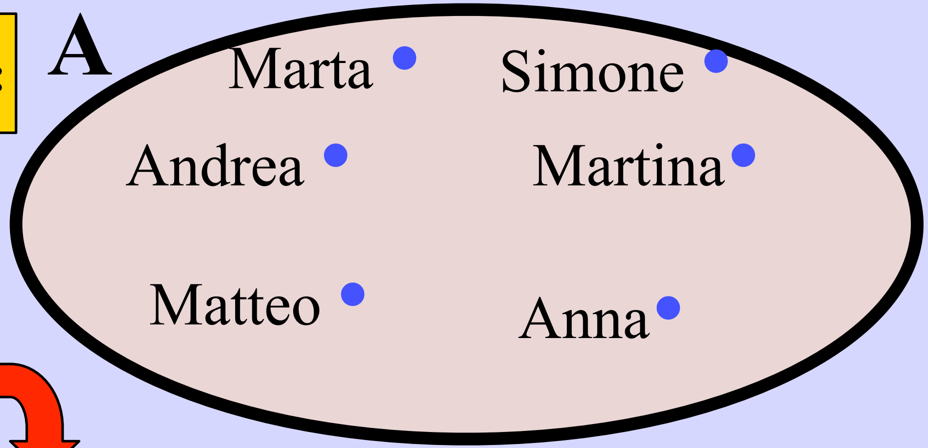
insieme,

appartenenza
di un elemento ad un insieme.

RAPPRESENTAZIONE

Per rappresentare un qualsiasi insieme possiamo utilizzare tre diversi metodi. Si voglia ad esempio rappresentare l'insieme che chiameremo "A" di tutti gli amici di Marco che sono: Andrea, Marta, Simone, Matteo, Anna, Martina.

1 **Con i diagrammi di <u>Eulero Venn</u>:**



2 **Attraverso la rappresentazione <u>tabulare</u> (estensiva):**

A = {Marta; Andrea; Matteo; Martina; Simone; Anna}

3 **Enunciando la <u>proprietà caratteristica</u> (intensiva):**

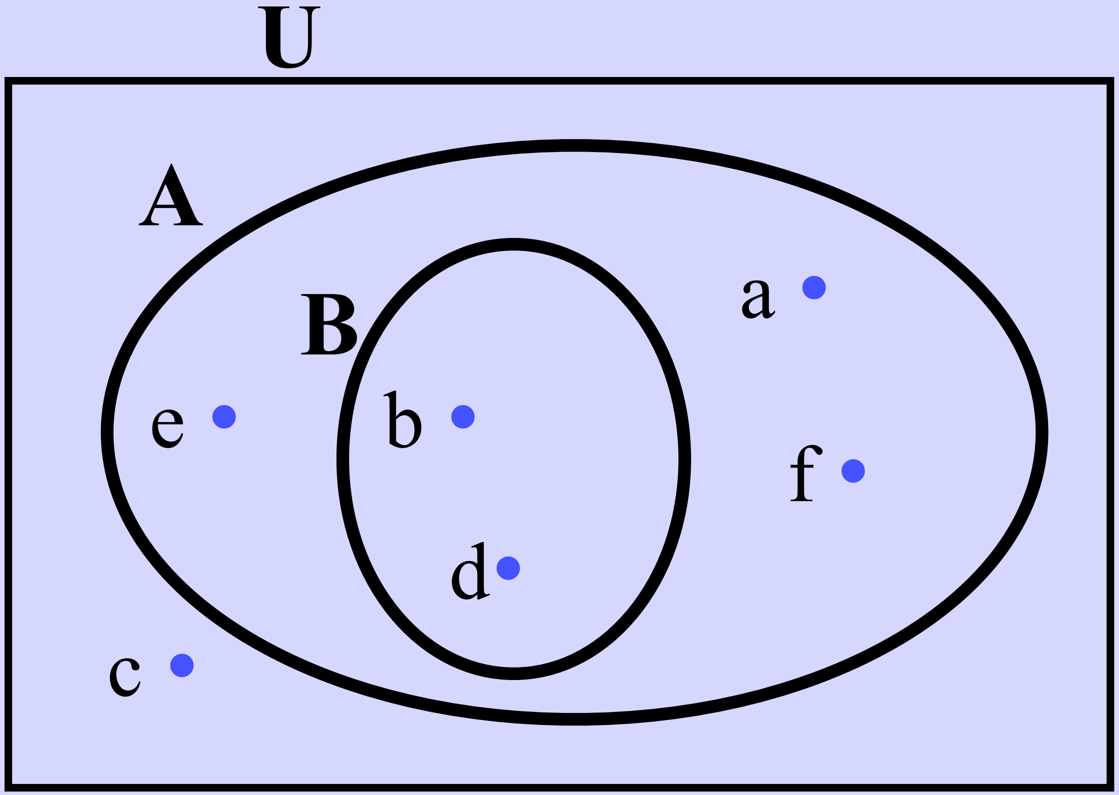
A = {x | x è amico di Marco}

APPARTENENZA "$\in$"

$B = \{b; d\}$

$A = \{a; b; d; e; f\}$

$U = \{a; b; c; d; e; f\}$



$a \in A$, $a \in U$, $a \notin B$,

$b \in B$, $b \in A$, $b \in U$

$c \in U$, $c \notin B$, $c \notin A$

SOTTOINSIEMI, INCLUSIONE “⊆, ⊂”

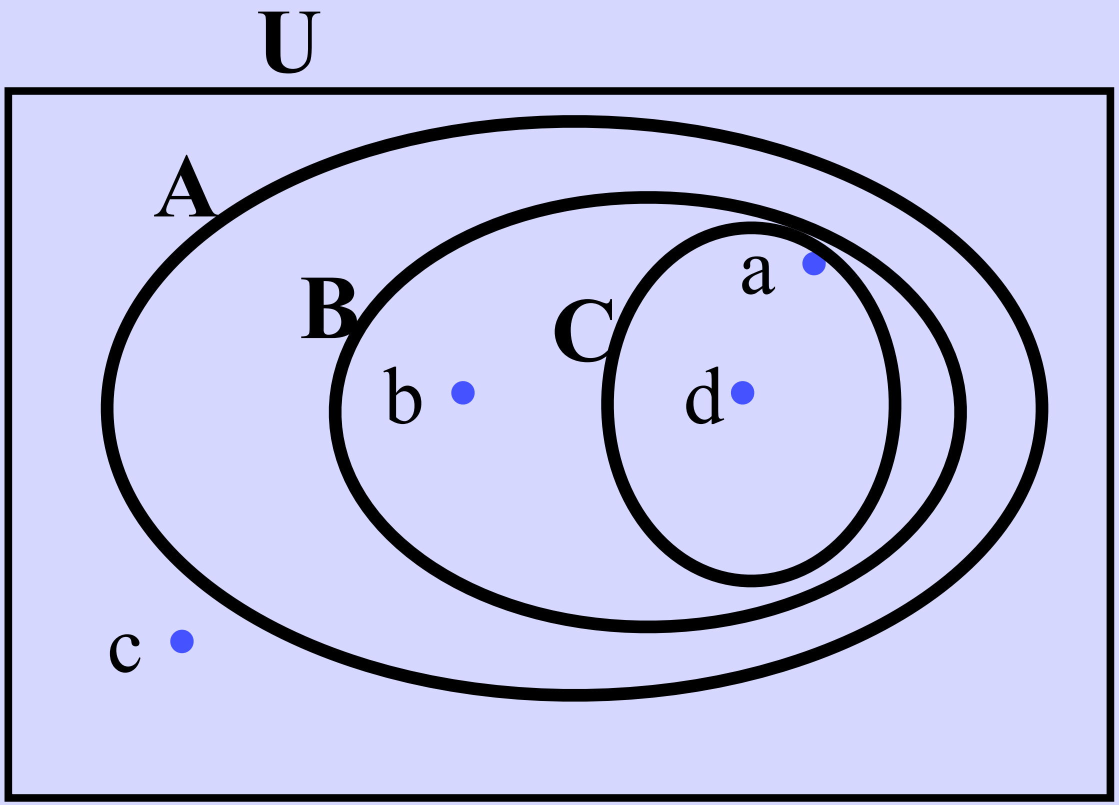
B è un SOTTOINSIEME IMPROPRIO di A

Ogni insieme è un SOTTOINSIEME (IMPROPRIO) di sé stesso

L’insieme vuoto è un SOTTOINSIEME (IMPROPRIO) di ogni insieme

A è un SOTTOINSIEME DI U

C è un SOTTOINSIEME DI B



$B \subseteq A$

$\varnothing \subseteq C$, $\varnothing \subseteq B$, …..

$A \subseteq A$, $B \subseteq B$,…..

$A \subset U$

$C \subset B$

www.domenicoperrone.net

SOTTOINSIEMI, INCLUSIONE

$U = \{a; b; c; d; e; f\}$

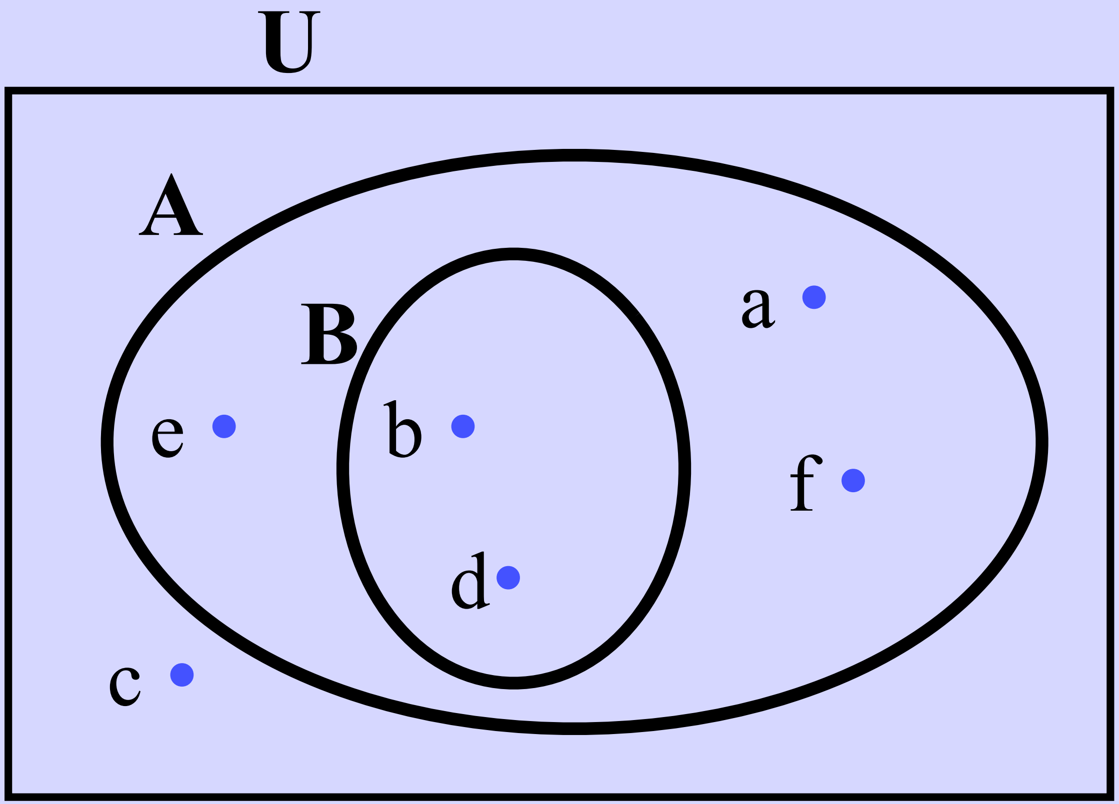
$A = \{a; b; d; e; f\}$

$B = \{b; d\}$

$\{b; d\} \subseteq B$

$\{a; b; d\} \subset A$

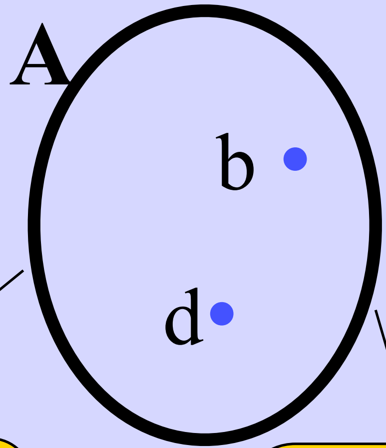
$\{d\} \subset B$



APPARTENENZA e INCLUSIONE

APPARTENENZA

$\in$



INCLUSIONE

$\subseteq$ $\subset$

<u>L'elemento</u> b appartiene all'insieme A

$b \in A$

<u>L'insieme</u> {b} è strettamente incluso nell'insieme A

$\{b\} \subset A$

<u>L'insieme</u> {d;b} è uguale ad A

$\{d;b\} \subseteq A$

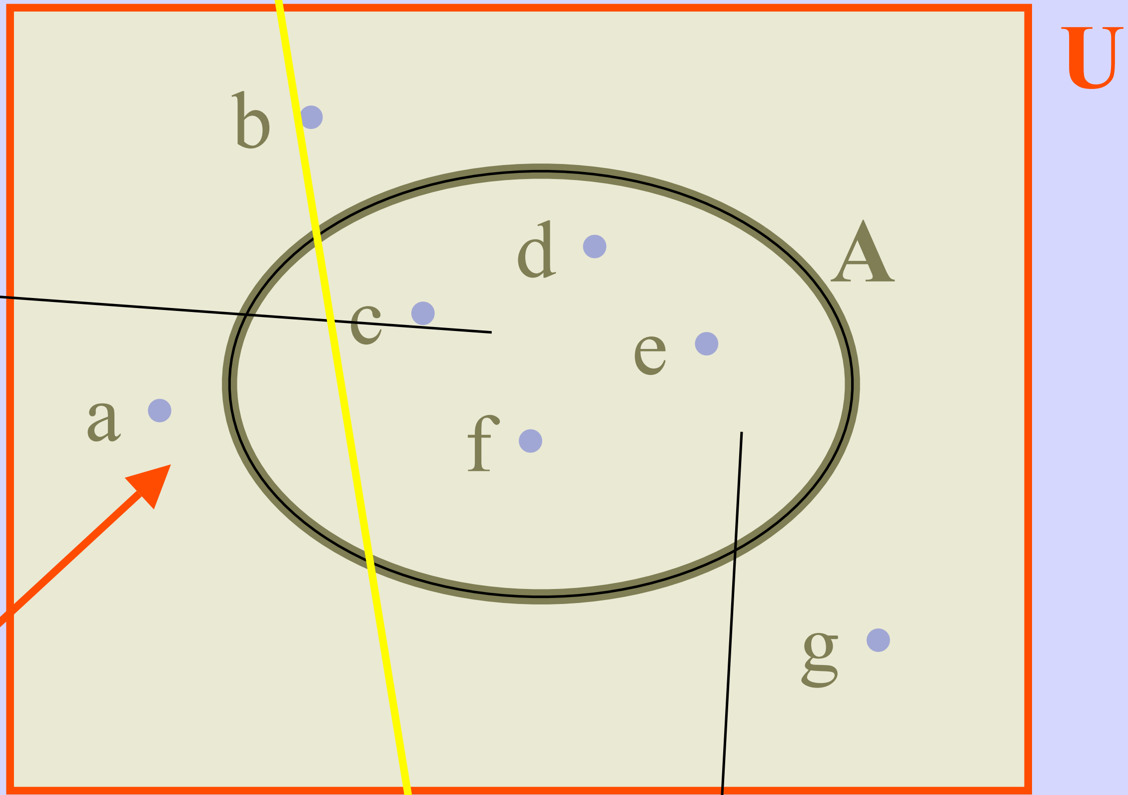
oppure

$\{d;b\} = A$

INSIEME COMPLEMENTARE. $\underline{A}$

$\underline{A} = C_u A = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$

E' l'insieme degli elementi di U



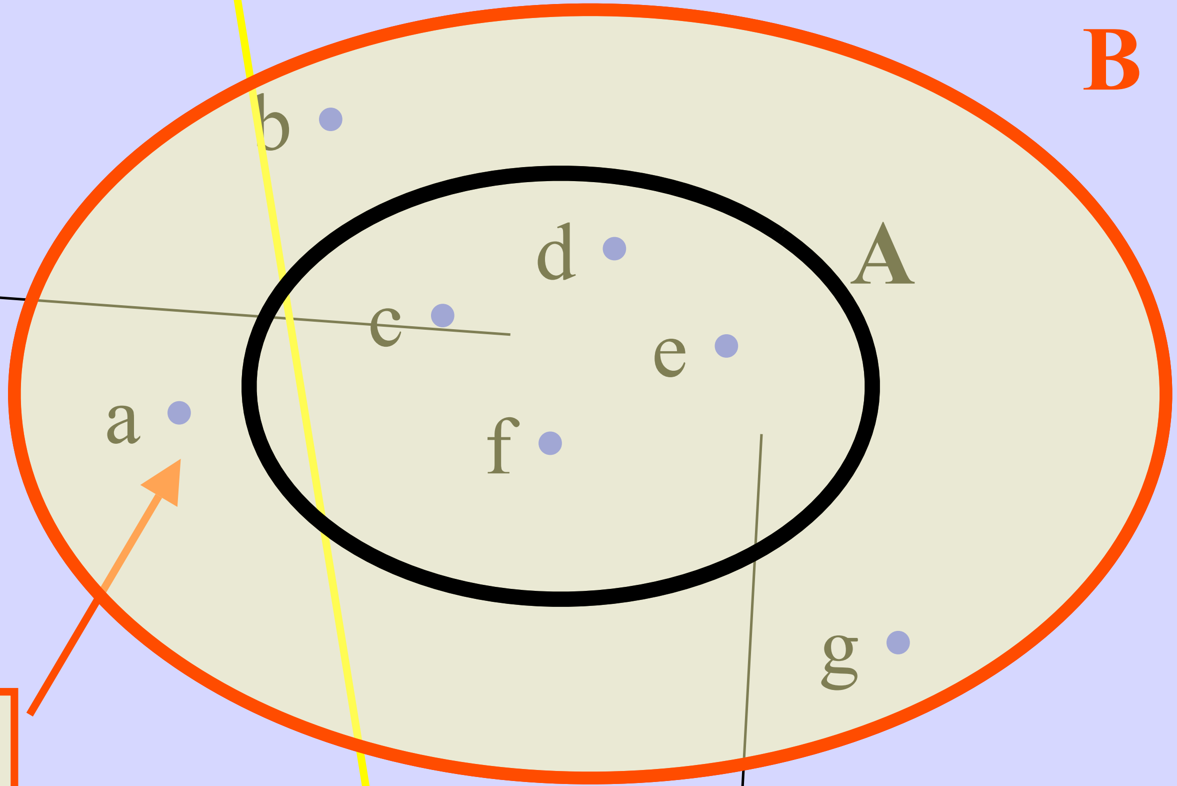
Che non appartengono ad A

$\underline{A} = \{a; b; g\}$

INSIEME COMPLEMENTARE. $C_B A$

$C_B A = \{x \mid \boxed{x \in B} \text{ e } \boxed{x \notin A}\}$

E' l'insieme degli elementi di B



$\boxed{C_B A = \{a; b; g\}}$

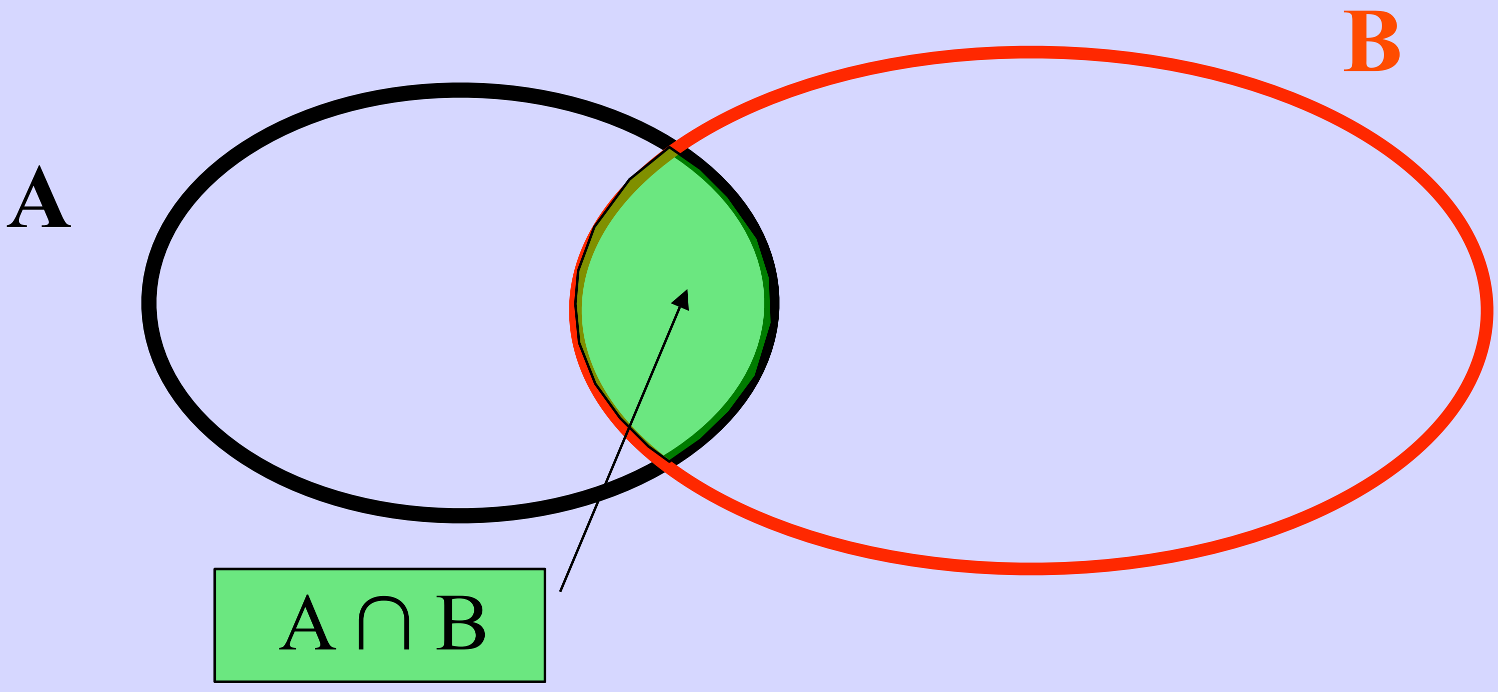
Che non appartengono ad A

www.domenicoperrone.net

INTERSEZIONE “$A \cap B$”

E’ l’insieme degli elementi che appartengono sia ad A sia a B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



www.domenicoperrone.net

CASI PARTICOLARI DELL'INTERSEZIONE

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cap \underline{A} = \varnothing$$

Se $A \cap B = \varnothing$,
A e B si dicono DISGIUNTI

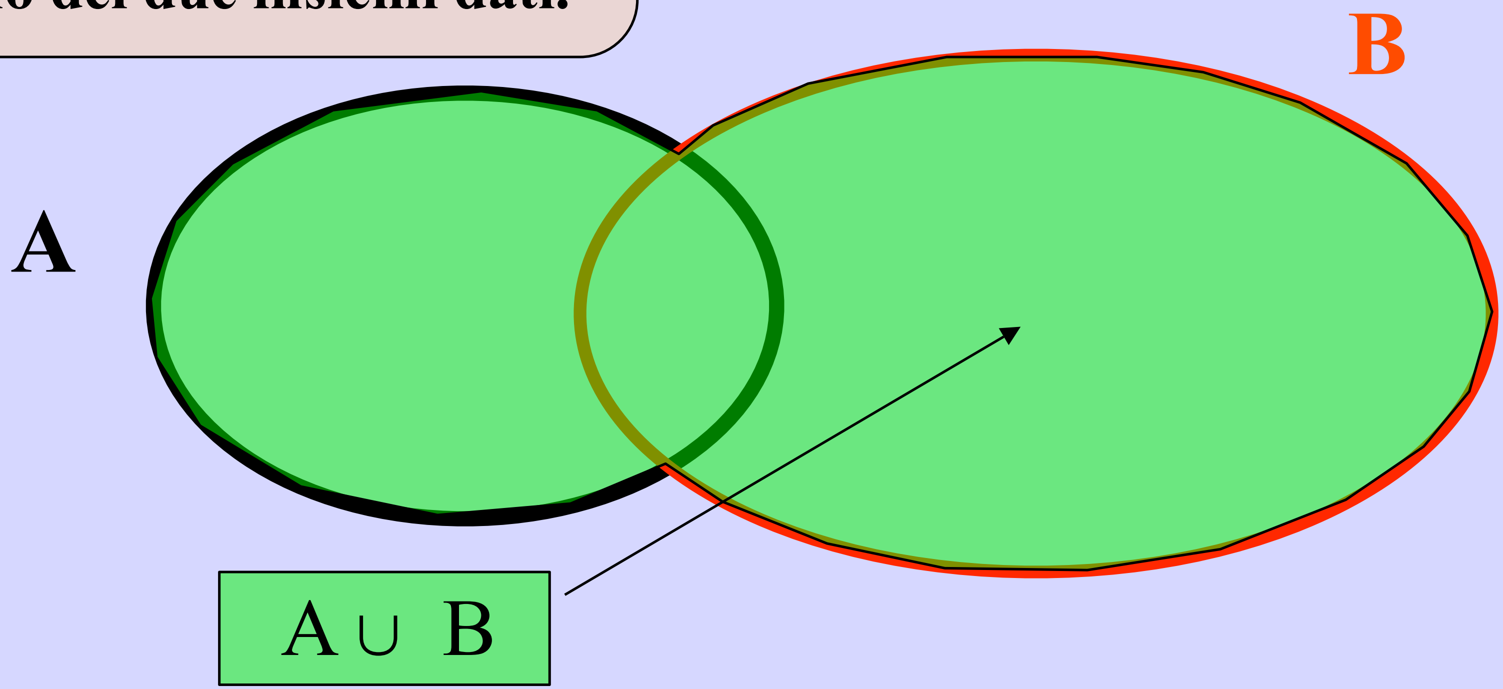
Se $B \subset A$ allora $A \cap B = B$

$$A \cap U = A$$

UNIONE “A ∪ B”

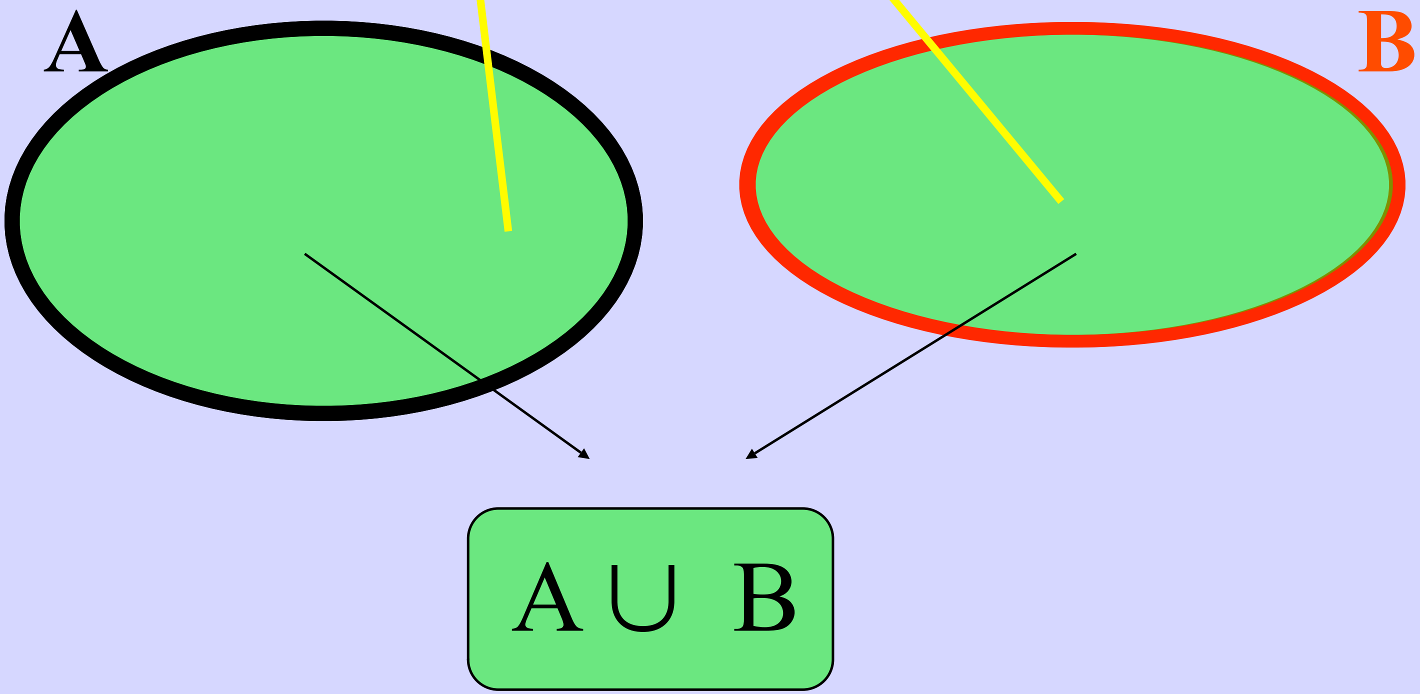
E’ l’insieme degli elementi che appartengono ad A “o” a B, cioè ad almeno uno dei due insiemi dati.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$



UNIONE di insiemi DISGIUNTI

L'UNIONE degli insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A “o” a B, cioè ad almeno uno dei due insiemi dati.



CASI PARTICOLARI DELL'UNIONE

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

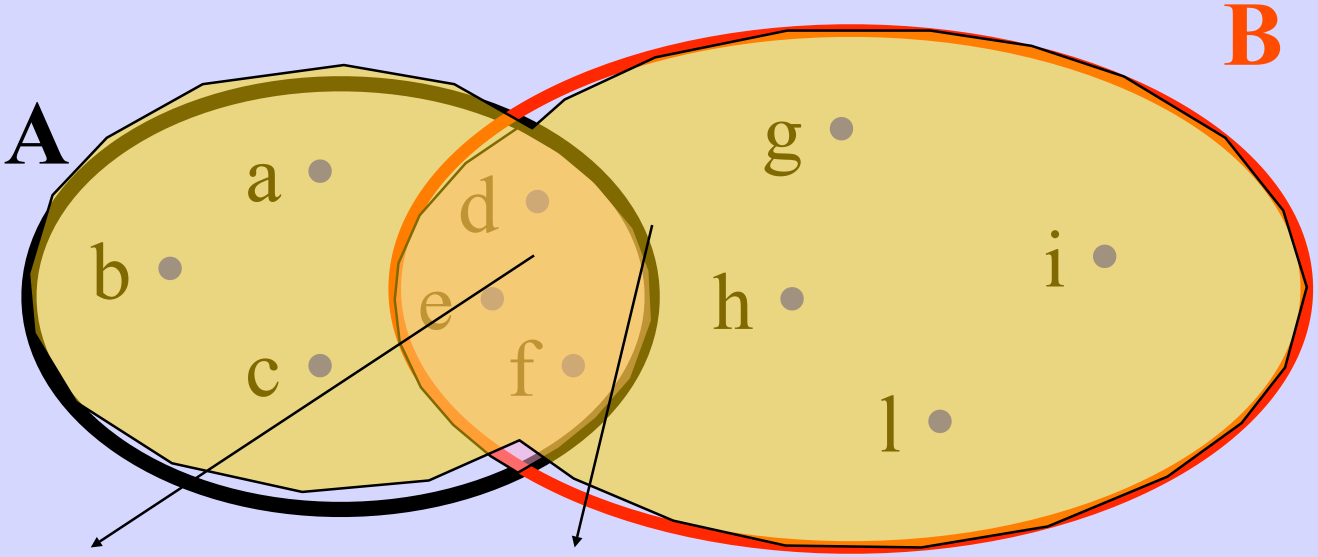
$$A \cup \underline{A} = U$$

Se $B \subset A$ allora $A \cup B = A$

$A \cap B$ $A \cup B$

$A = \{a; b; c; d; e; f\}$

$B = \{d; e; f; g; h; i; l\}$



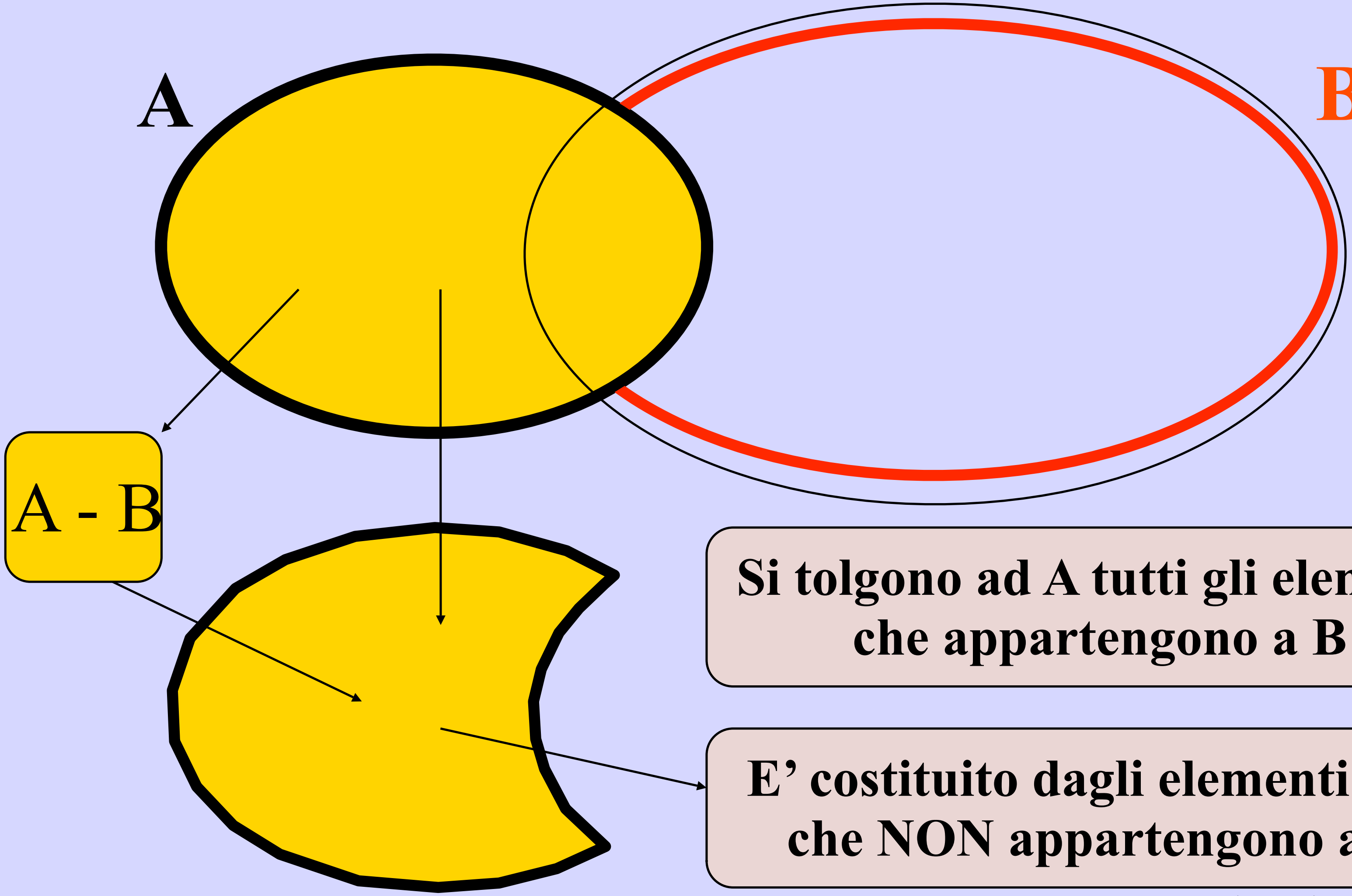
$A \cap B = \{d; e; f\}$

$A \cup B = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i; l\}$

DIFFERENZA. “A - B”

E’ l’insieme formato da tutti gli elementi di A che non appartengono a B

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



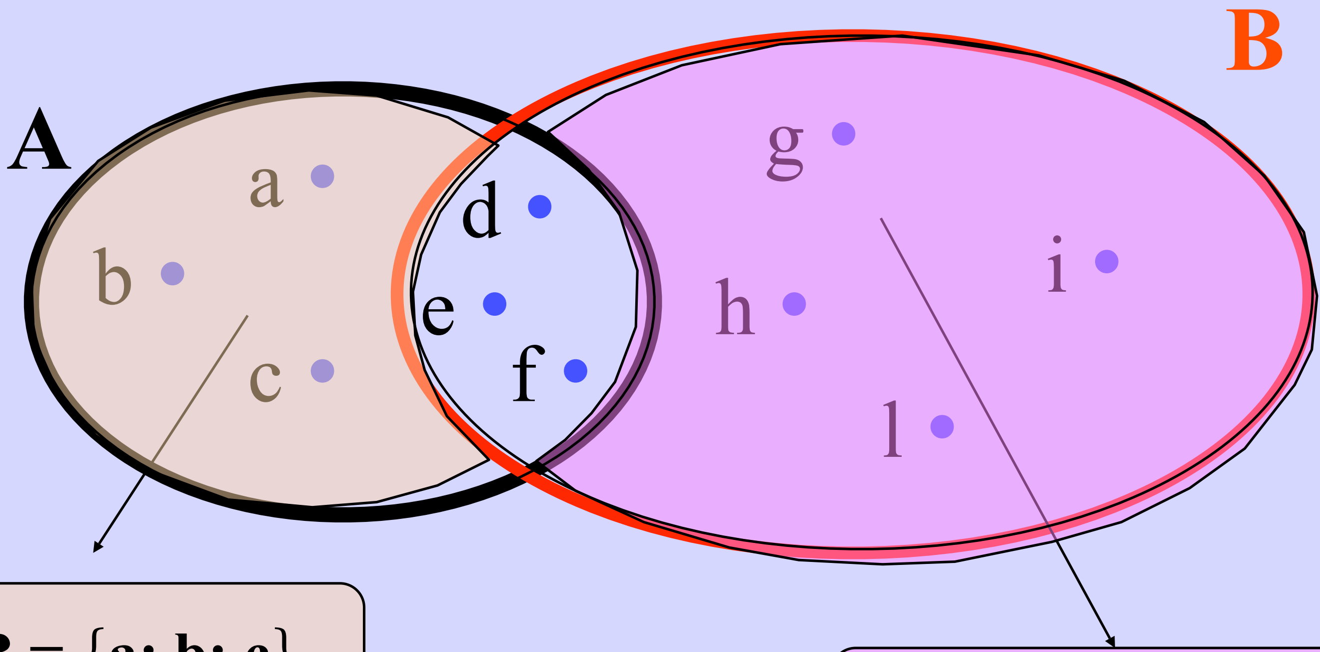
Si tolgono ad A tutti gli elementi che appartengono a B

E’ costituito dagli elementi di A che NON appartengono a B

DIFFERENZA. “A - B”, “B - A”.

A = {a; b; c; d; e; f}

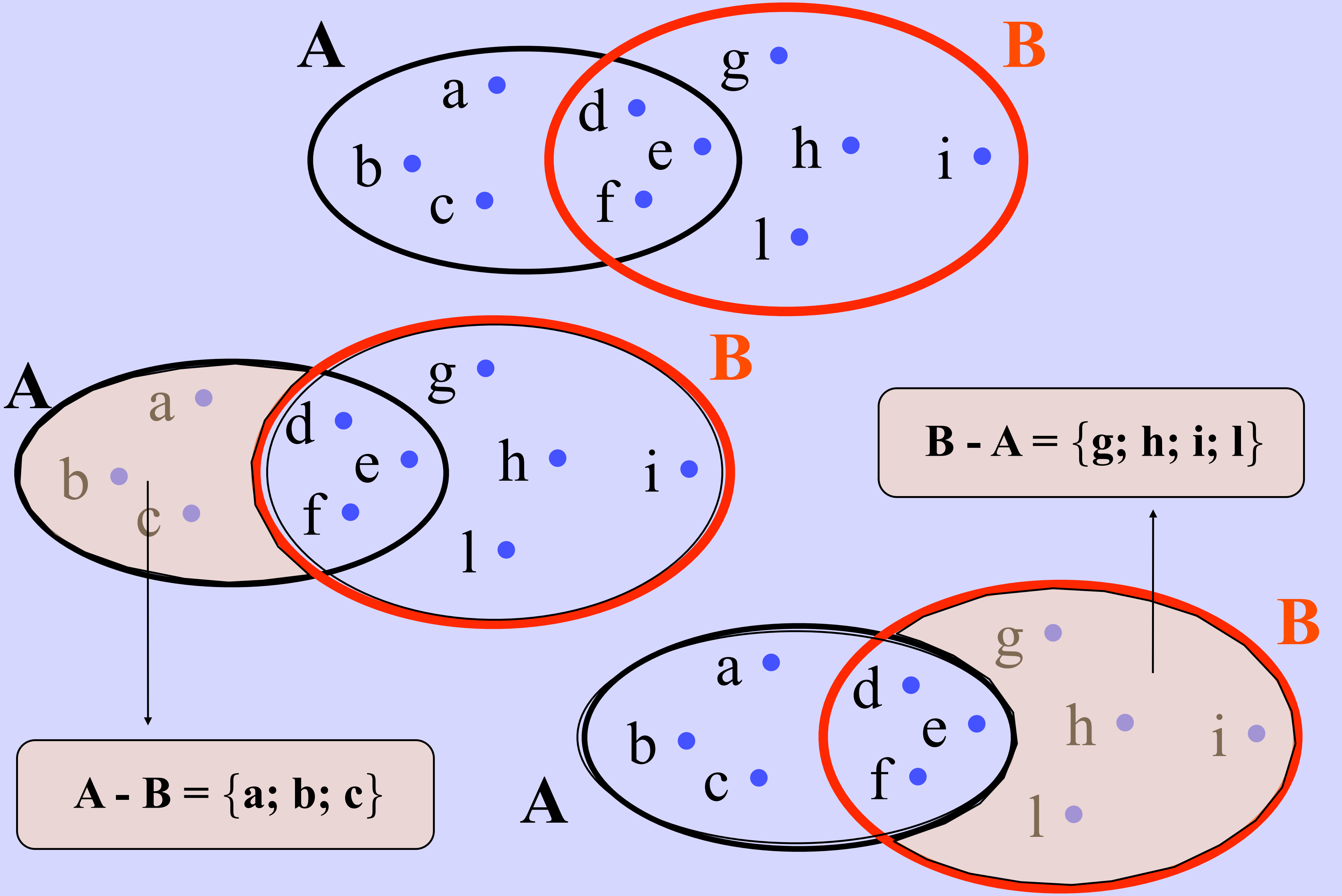
B = {d; e; f; g; h; i; l}



A - B = {a; b; c}

B - A = {g; h; i; l}

DIFFERENZA. “A - B”, “B - A”.



CASI PARTICOLARI DELLA DIFFERENZA TRA INSIEMI

$A - A = \varnothing$

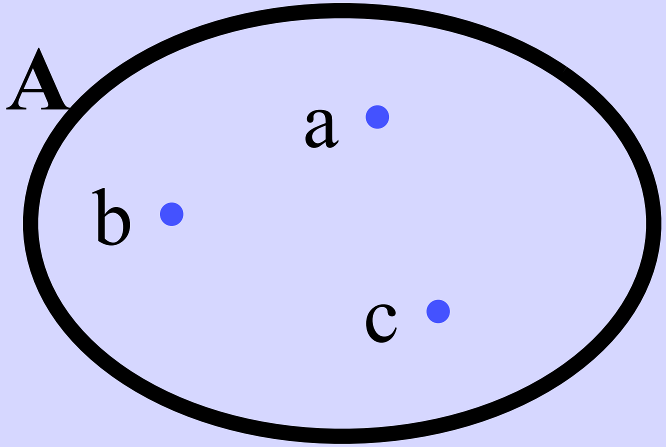
$A - \varnothing = A$

Se $A \cap B = \varnothing$ allora $A - B = A$ e $B - A = B$

Se $B \subseteq A$ allora $B - A = \varnothing$

INSIEME DELLE PARTI “P(A)”

$A = \{a; b; c;\}$



Dato un insieme A, l’insieme di tutti i suoi SOTTOINSIEMI propri e impropri, si definisce <u>insieme delle parti</u> di A e si indica con P(A)

L’insieme delle parti di A è:

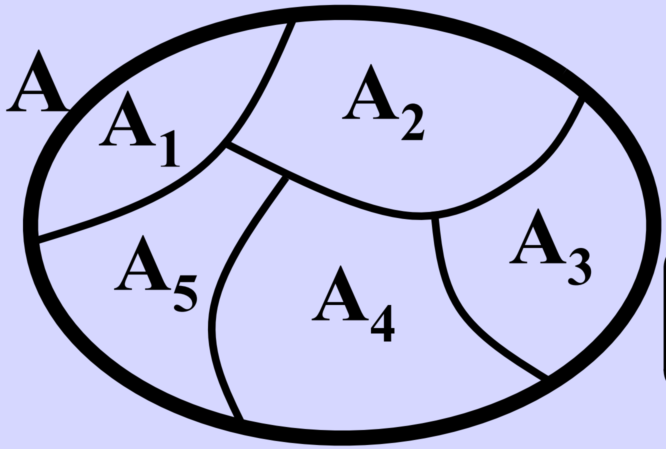
$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a; b\}$	$\{a; c\}$	$\{b; c\}$	$\{a; b; c\}$

$$P(A) = \{\ \varnothing; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\ \}$$

Gli elementi di P(A) sono INSIEMI

Se A contiene n elementi, P(A) ne contiene 2^n

PARTIZIONE DI UN INSIEME



Si consideri un numero “n” di sottoinsiemi di A.

Si dice che questi sottoinsiemi costituiscono una PARTIZIONE di A se:

1 $Ai \subset A$ e $Ai \neq \varnothing, \ \forall i$ → Ogni sottoinsieme è proprio

2 $Ai \cap Ak = \varnothing$ con $i \neq k$ → I sottoinsiemi sono a due a due disgiunti

3 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = A$ → L’unione di tutti i sottoinsiemi dà l’insieme A

PRODOTTO CARTESIANO

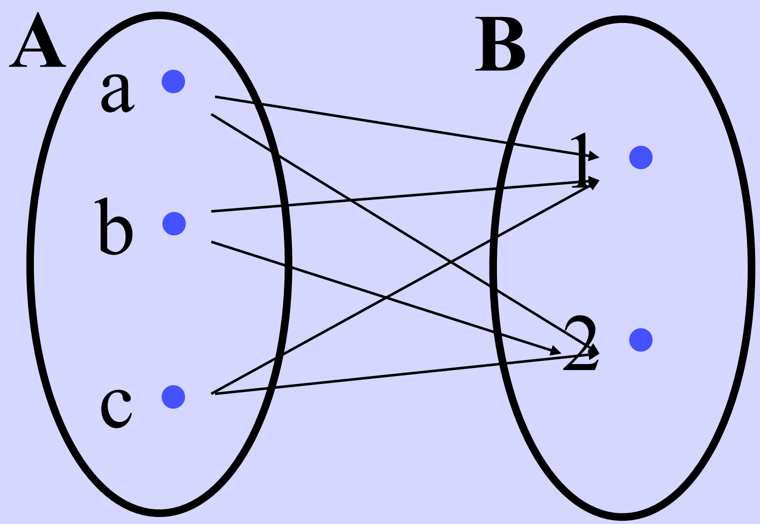
Si definisce prodotto cartesiano di due insiemi A e B, e si indica <u>A x B</u>, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate (x;y) dove il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B

$\boxed{A \times B} = \{(x;y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$

Si legge A cartesiano B

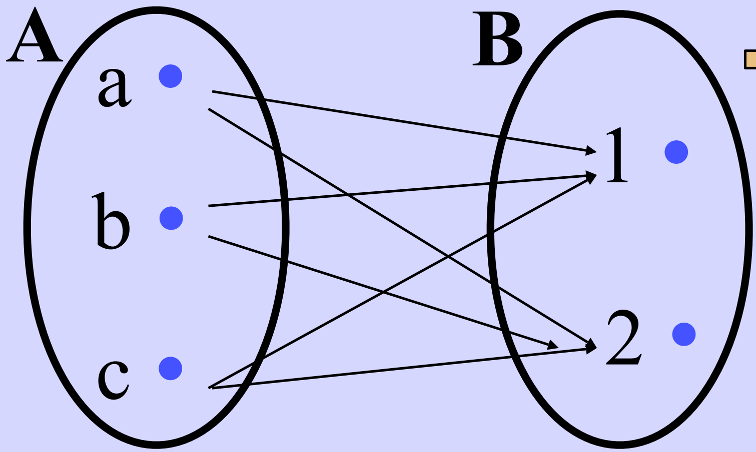
Dati gli insiemi: $A = \{a;\ b;\ c;\}$ e $B = \{1;2\}$

$$A \times B = \{\ (a\ ;1),\ (a\ ;2),\ (b\ ;1),\ (b\ ;2),\ (c\ ;1),\ (c\ ;2)\ \}$$



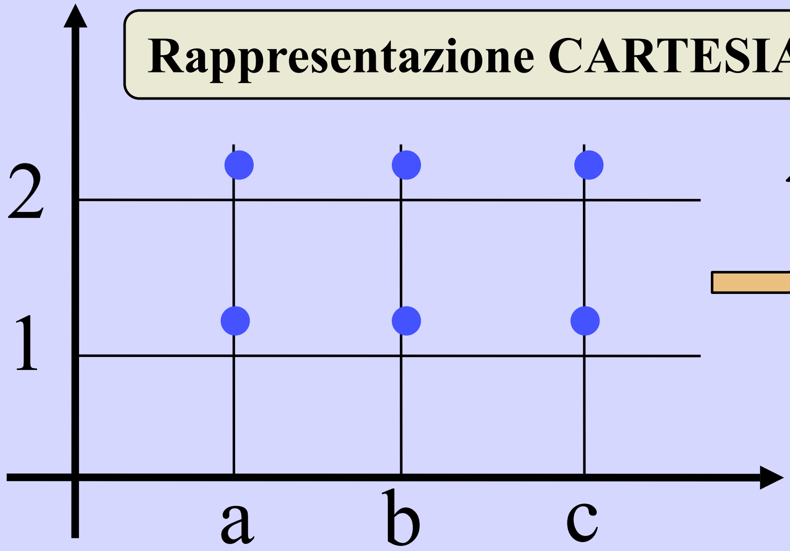
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEL PRODOTTO CARTESIANO

L'insieme A x B = {(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)} può essere rappresentato graficamente nei seguenti modi:



Rappresentazione SAGITTALE

Rappresentazione mediante tabella a DOPPIA ENTRATA



Rappresentazione CARTESIANA

1	**(a;1)**	**(b;1)**	**(c;1)**
2	**(a;2)**	**(b;2)**	**(c;2)**
B / A	**a**	**b**	**c**

OSSERVAZIONI SUL PRODOTTO CARTESIANO

La coppia (x;y) è diversa dalla coppia (y;x)

Gli <u>elementi</u> dell'insieme cartesiano sono <u>coppie</u>

$$A \times A = A^2$$

$$A \times B \neq B \times A$$

Se A e B hanno rispettivamente "n" e "m" elementi, l'insieme A x B possiede "nxm" elementi.