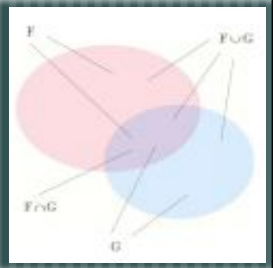
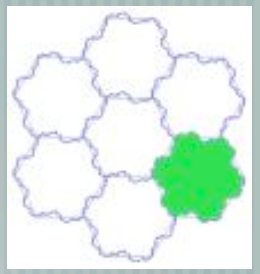
GLI INSIEMI

Laboratorio per apprendimenti logico - matematici

- Dispensa a cura del prof.
- Domenico Perrone
- Maggio 2005

I problemi

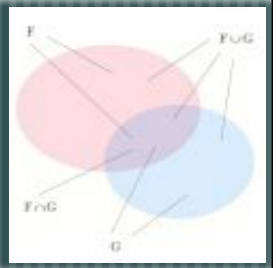




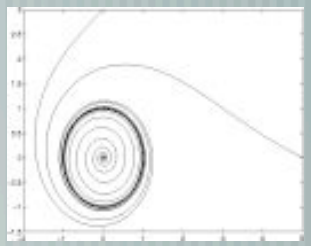
- Perché gli Insiemi?
- Cos'è un insieme?
- Cantor, Frege, Russell
- Quale ruolo riveste nella consapevolezza matematica di uno studente?

info@domenicoperrone.net

I problemi

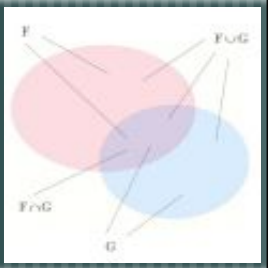


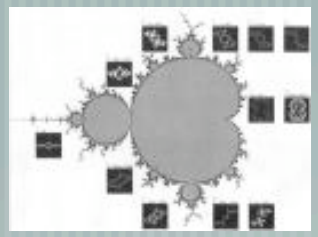
- La attuale epistemologia della Matematica ha accettato in pieno i risultati della scuola fondazionista.
- La Matematica è un edificio i cui pilastri sono:
  - la Logica
  - e l'Insiemistica



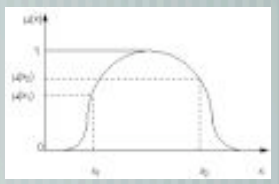
info@domenicoperrone.net

I problemi



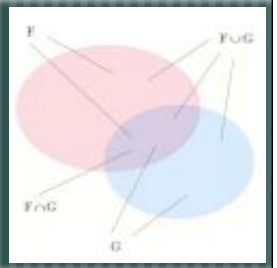


- i Problemi che hanno portato alla rifondazione
- Teoria ingenua degli insiemi
- Definizione di Insieme



info@domenicoperrone.net

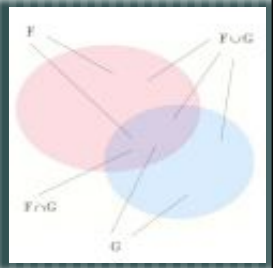
I problemi



- Un Percorso minimo per comprendere l'importanza semantica ed operativa dell'insiemistica:
  - Definizioni
  - Simbologia
  - Rappresentazioni
  - Operazioni in un insieme
  - Operazioni tra insiemi

info@domenicoperrone.net

I problemi



- Nella *teoria ingenua degli insiemi*, e per i fini tutti dell'educazione matematica nella scuola secondaria, definiamo Insieme un aggregato di elementi che godono di una stessa proprietà. (e consapevolmente abbandoniamo tutti i problemi di Russell)

info@domenicoperrone.net

RAPPRESENTAZIONE

Per rappresentare un qualsiasi insieme possiamo utilizzare tre diversi metodi. Si voglia ad esempio rappresentare l'insieme che chiameremo "A" di tutti gli amici di Marco che sono: Andrea, Marta, Simone, Matteo, Anna, Martina.

1 **Con i diagrammi di Eulero Venn:**

2 **Attraverso la rappresentazione tabulare (estensiva):**

$$A = \{\text{Marta; Andrea; Matteo; Martina; Simone; Anna}\}$$

3 **Enunciando la proprietà caratteristica (intensiva):**

$$A = \{x \mid x \text{ è amico di Marco}\}$$

info@domenicoperrone.net

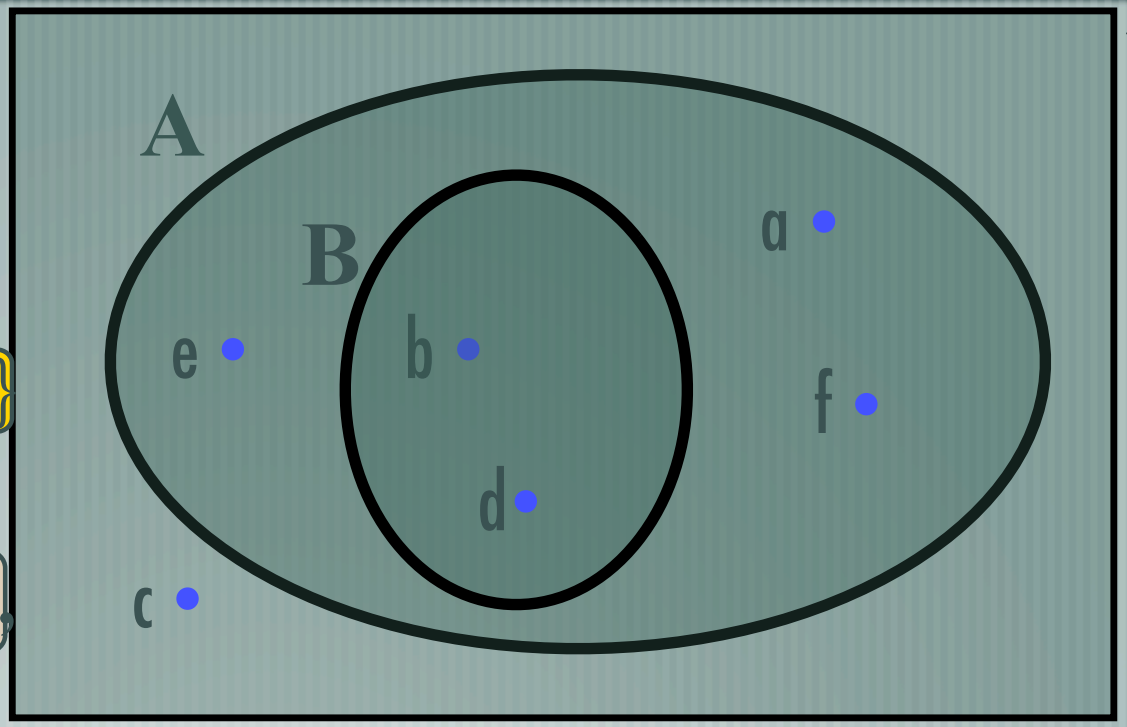
APPARTENENZA "∈"

$B = \{b; d\}$

$A = \{a; b; d; e; f\}$

$U = \{a; b; c; d; e; f\}$

$a \in A,\ a \in U,\ a \notin B$



$c \in U,\ c \notin B,\ c \notin A$

$b \in B,\ b \in A,\ b \in U$

info@domenicoperrone.net

SOTTOINSIEMI, INCLUSIONE "$\subseteq$, $\subset$"

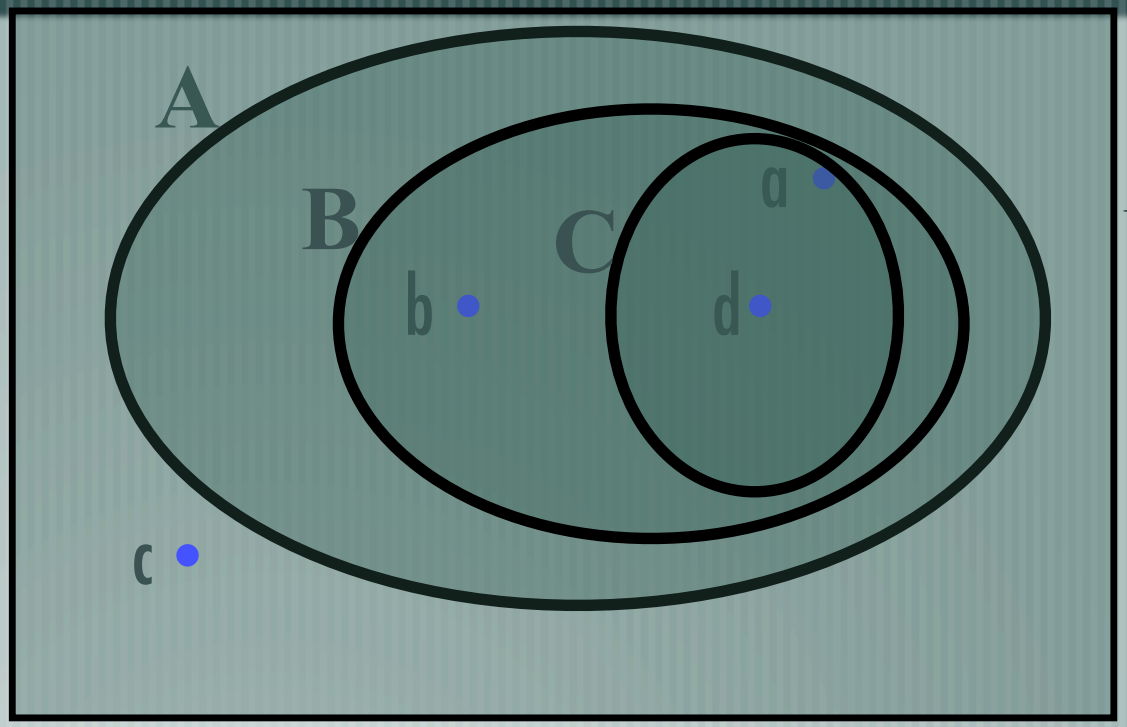
B è un SOTTOINSIEME IMPROPRIO di A

Ogni insieme è un SOTTOINSIEME (IMPROPRIO) di sé stesso

L'insieme vuoto è un SOTTOINSIEME (IMPROPRIO) di ogni insieme

A è un SOTTOINSIEME DI U

C è un SOTTOINSIEME DI B



$B \subseteq A$

$\varnothing \subseteq C, \varnothing \subseteq B, \ldots..$

$A \subseteq A, B \subseteq B, \ldots$

$A \subset U$

$C \subset B$

info@domenicoperrone.net

SOTTOINSIEMI, INCLUSIONE

$U = \{a; b; c; d; e; f\}$

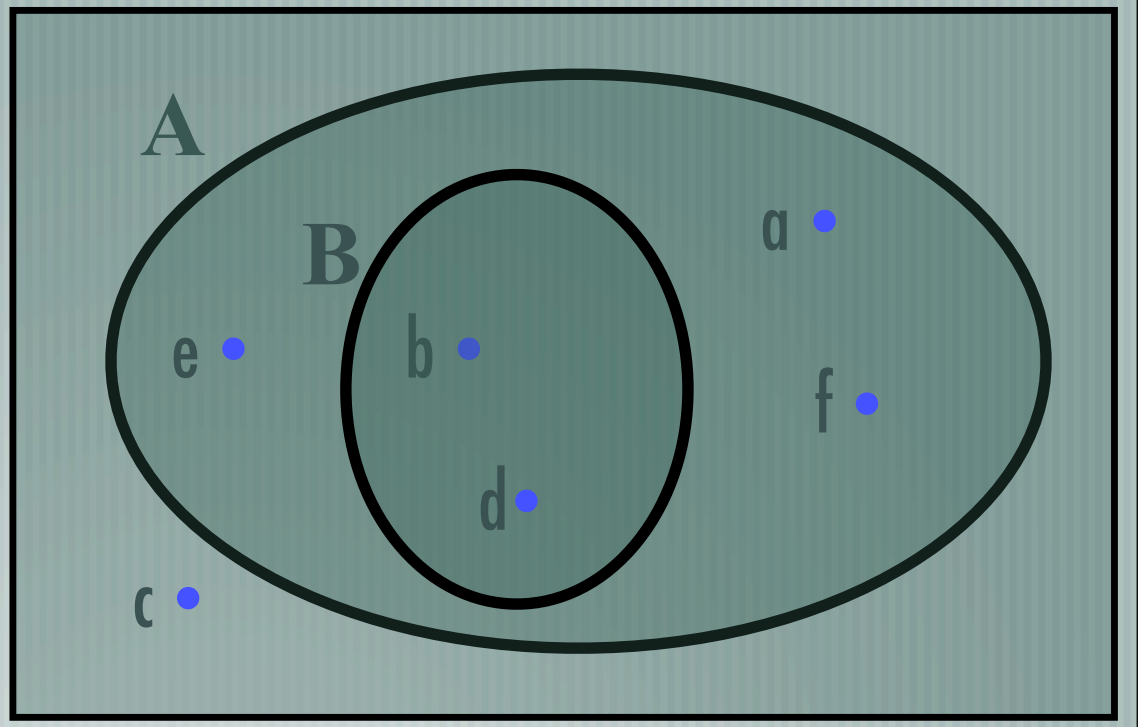
$A = \{a; b; d; e; f\}$

$B = \{b; d\}$

$\{b; d\} \subseteq B$

$\{a; b; d\} \subset A$

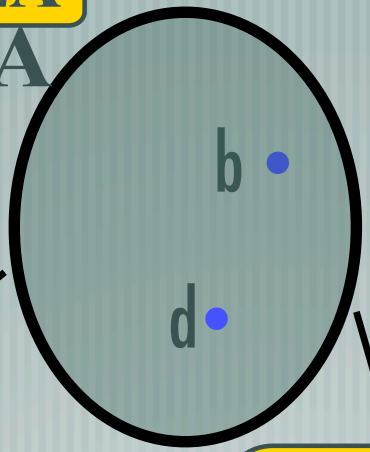
$\{d\} \subset B$



APPARTENENZA e INCLUSIONE

APPARTENENZA

INCLUSIONE



$\in$

$\subseteq$ $\subset$

L'elemento b appartiene all'insieme A

$b \in A$

L'insieme {b} è strettamente incluso nell'insieme A

$\{b\} \subset A$

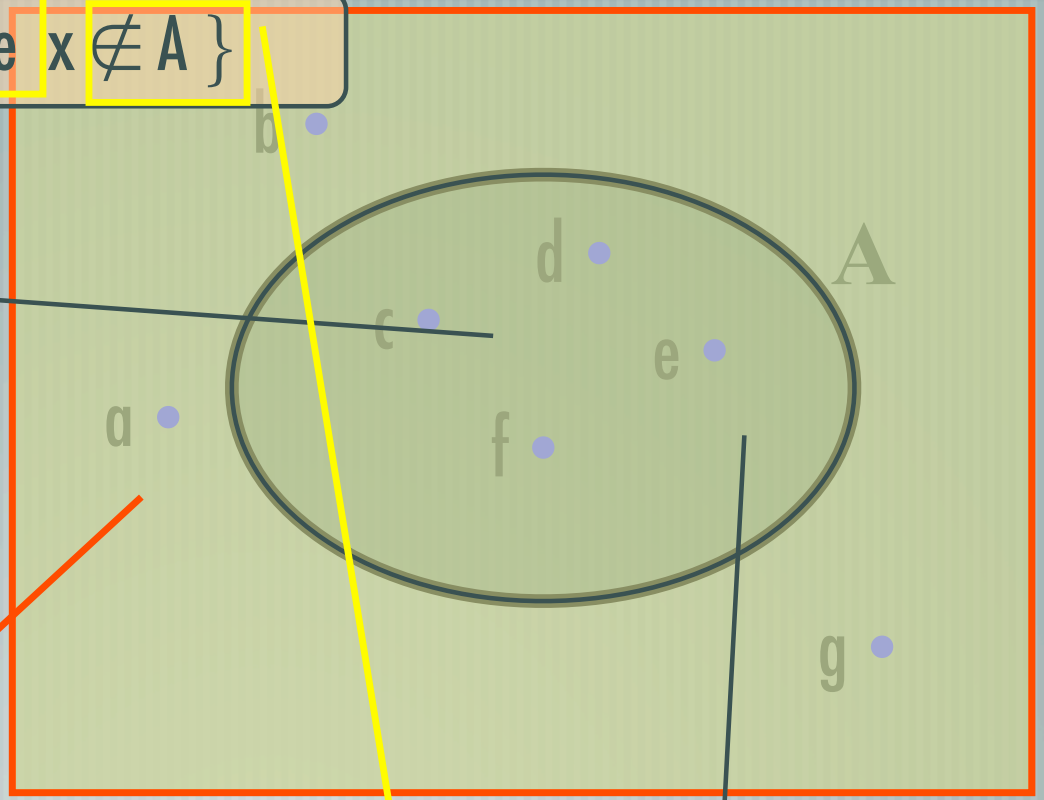
L'insieme {d;b} è uguale ad A

$\{d;b\} \subseteq A$ oppure $\{d;b\} = A$

info@domenicoperrone.net

INSIEME COMPLEMENTARE. A

$\underline{A} = C_u A = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$



E' l'insieme degli elementi di U

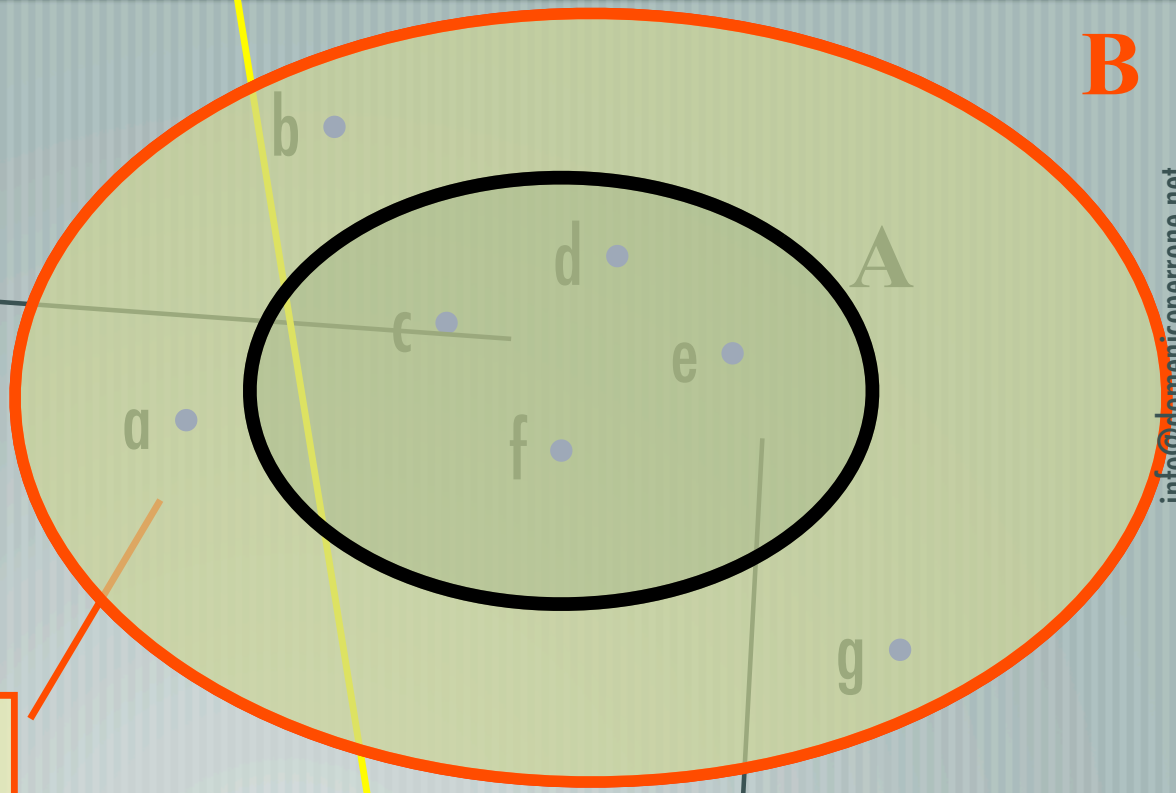
$\underline{A} = \{a; b; g\}$

Che non appartengono ad A

info@domenicoperrone.net

INSIEME COMPLEMENTARE. C_BA

$C_BA = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$



E' l'insieme degli elementi di B

$C_BA = \{a; b; g\}$

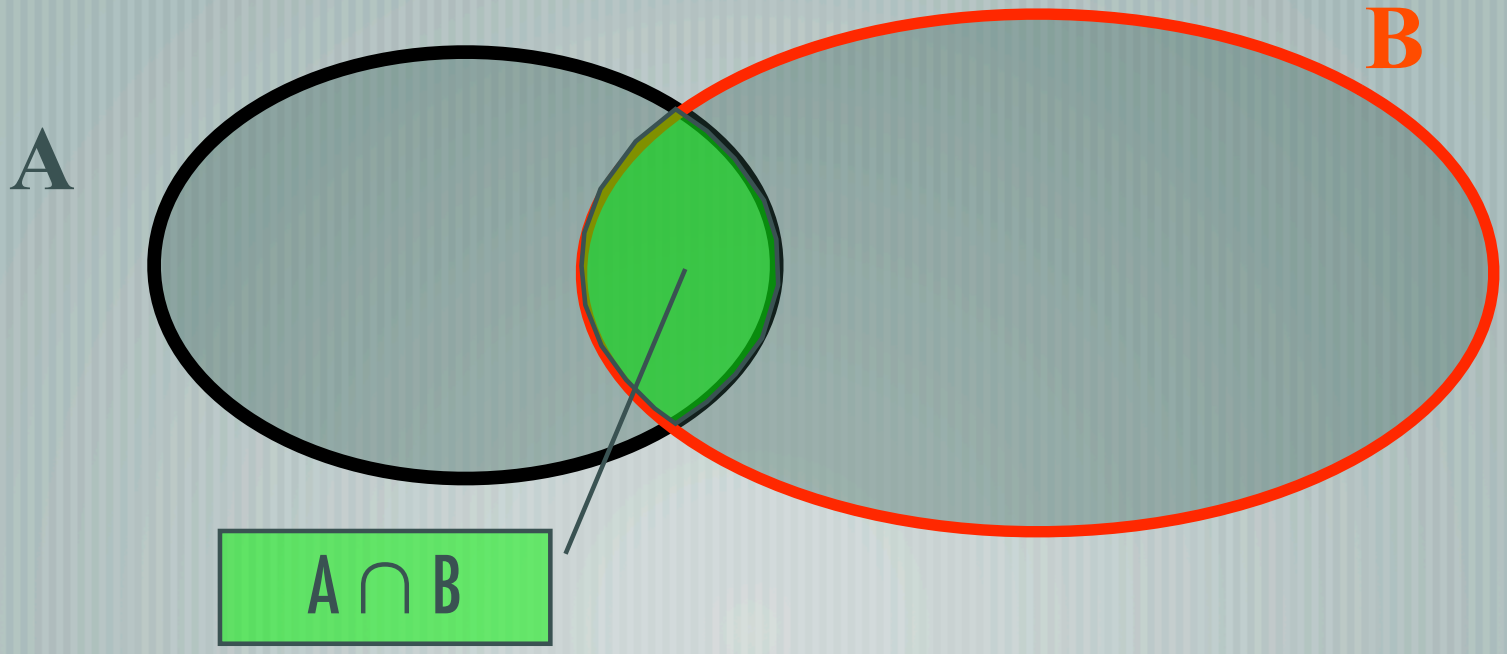
Che non appartengono ad A

info@domenicoperrone.net

INTERSEZIONE "A ∩ B"

E' l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A sia a B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



info@domenicopetrone.net

CASI PARTICOLARI DELL'INTERSEZIONE

$A \cap A = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cap \underline{A} = \varnothing$

Se $A \cap B = \varnothing$,
A e B si dicono DISGIUNTI

Se $B \subset A$ allora $A \cap B = B$

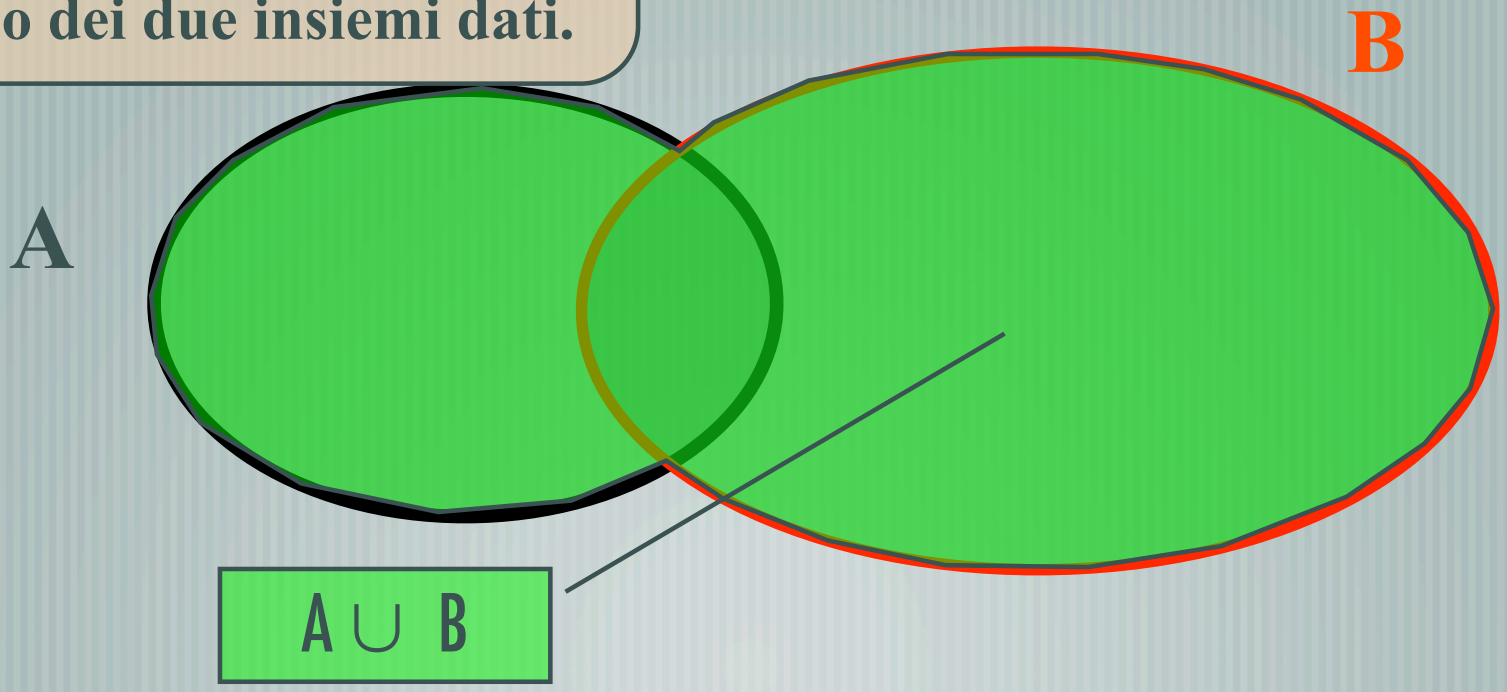
$A \cap U = A$

info@domenicoperrone.net

UNIONE "A ∪ B"

E' l'insieme degli elementi che appartengono ad A "o" a B, cioè ad almeno uno dei due insiemi dati.

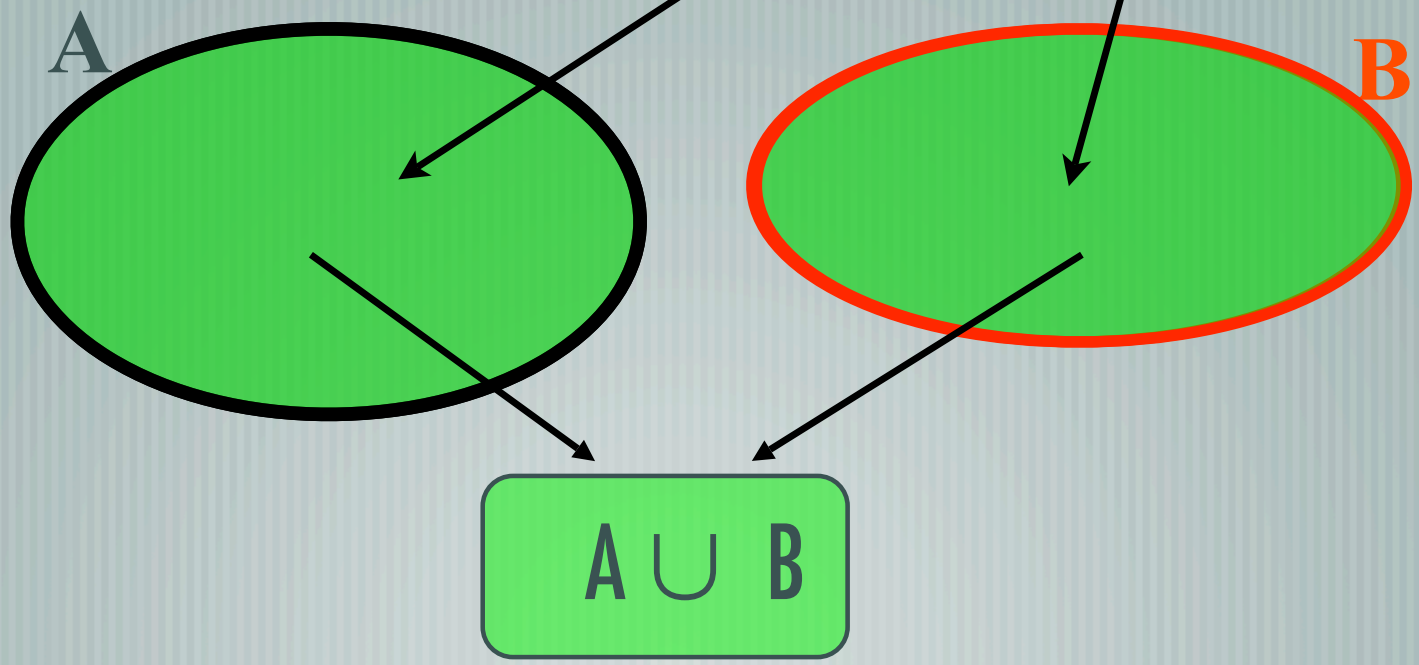
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$



info@domenicoperrone.net

UNIONE di insiemi DISGIUNTI

L'UNIONE degli insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A "o" a B, cioè ad almeno uno dei due insiemi dati.



info@domenicoperrone.net

CASI PARTICOLARI DELL'UNIONE

$A \cup A = A$

$A \cup \varnothing = A$

$A \cup \underline{A} = U$

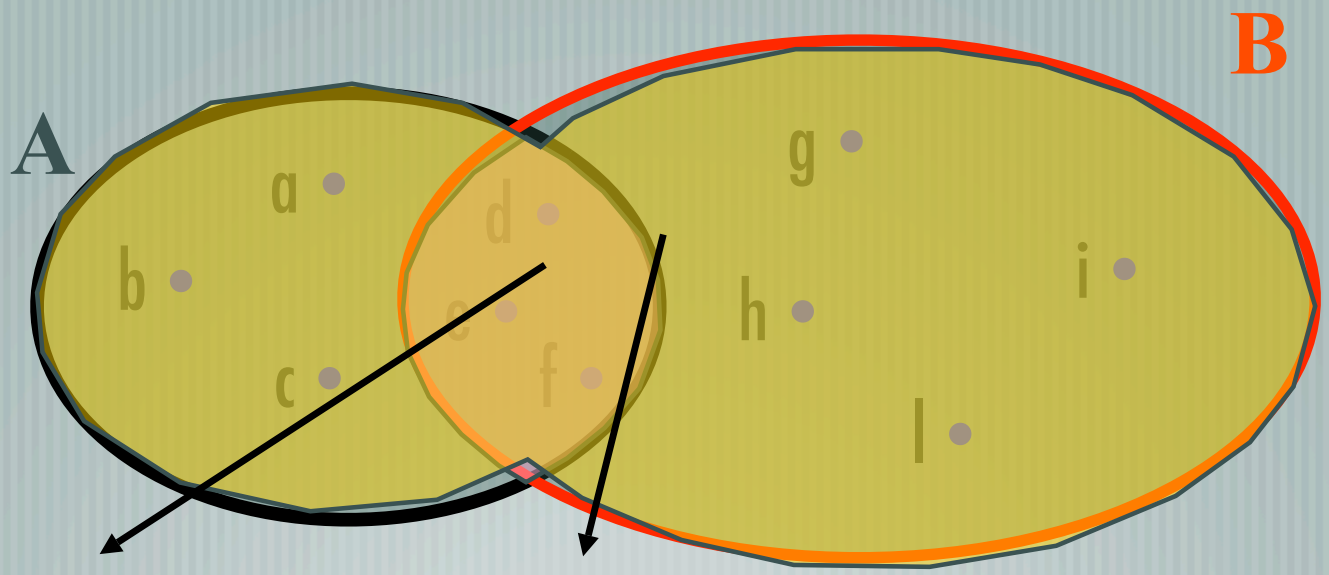
Se $B \subset A$ allora $A \cup B = A$

info@domenicoperrone.net

A ∩ B A ∪ B

A = {a; b; c; d; e; f}

B = {d; e; f; g; h; i; l}



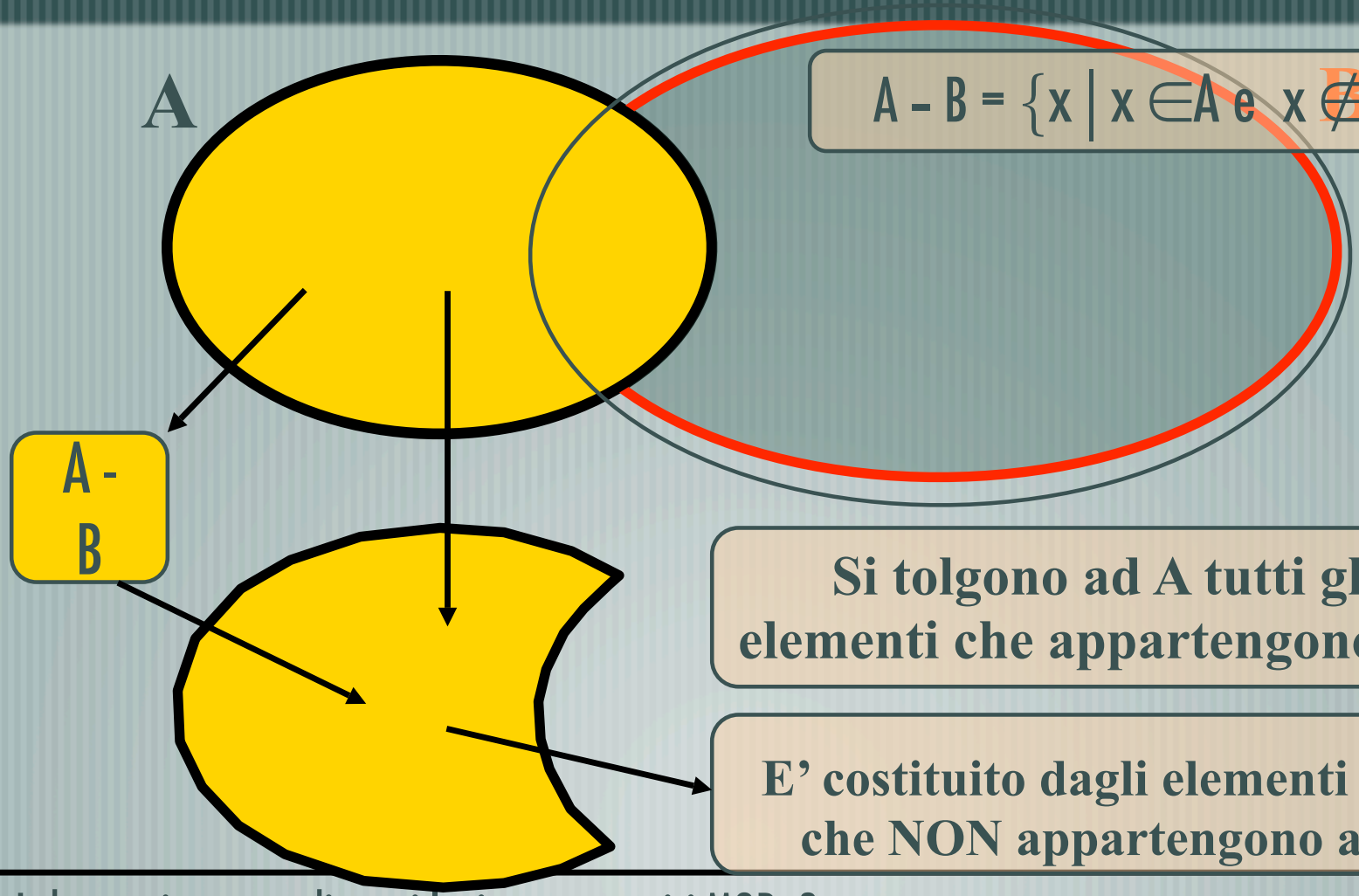
A ∩ B = {d; e; f}

A ∪ B = {a; b; c; d; e; f; g; h; i; l}

info@domenicoperrone.net

DIFFERENZA. "A - B"

E' l'insieme formato da tutti gli elementi di A che non appartengono a B



Si tolgono ad A tutti gli elementi che appartengono a B

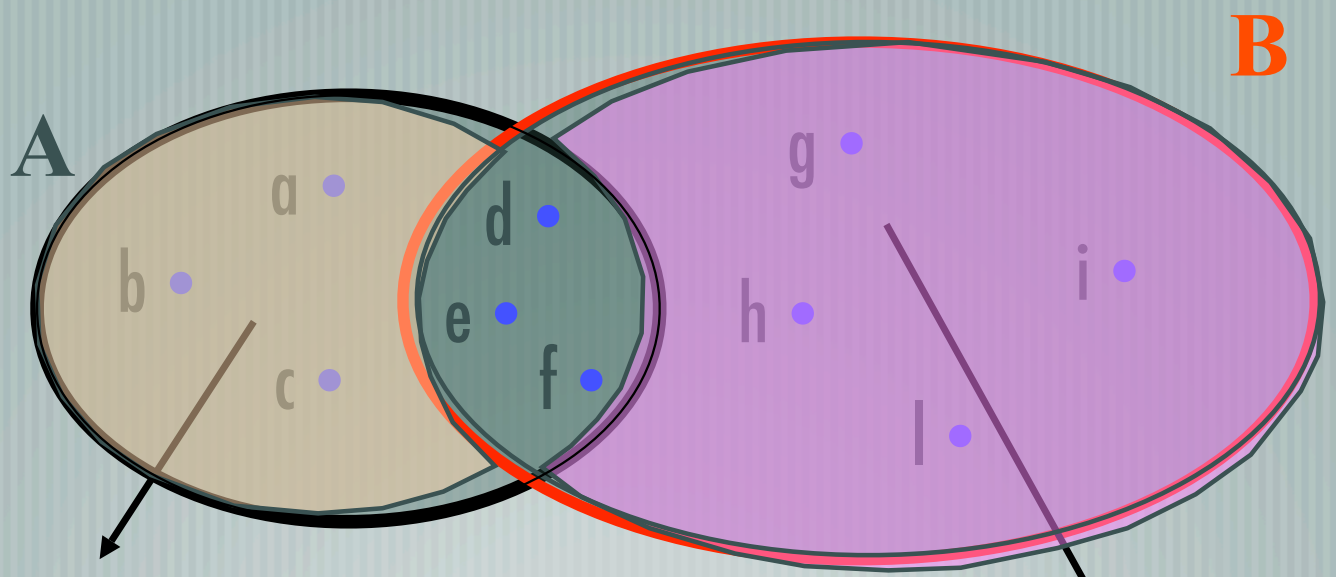
E' costituito dagli elementi di A che NON appartengono a B

info@domenicoperrone.net

DIFFERENZA. “A - B”, “B - A”.

A = {a; b; c; d; e; f}

B = {d; e; f; g; h; i; l}

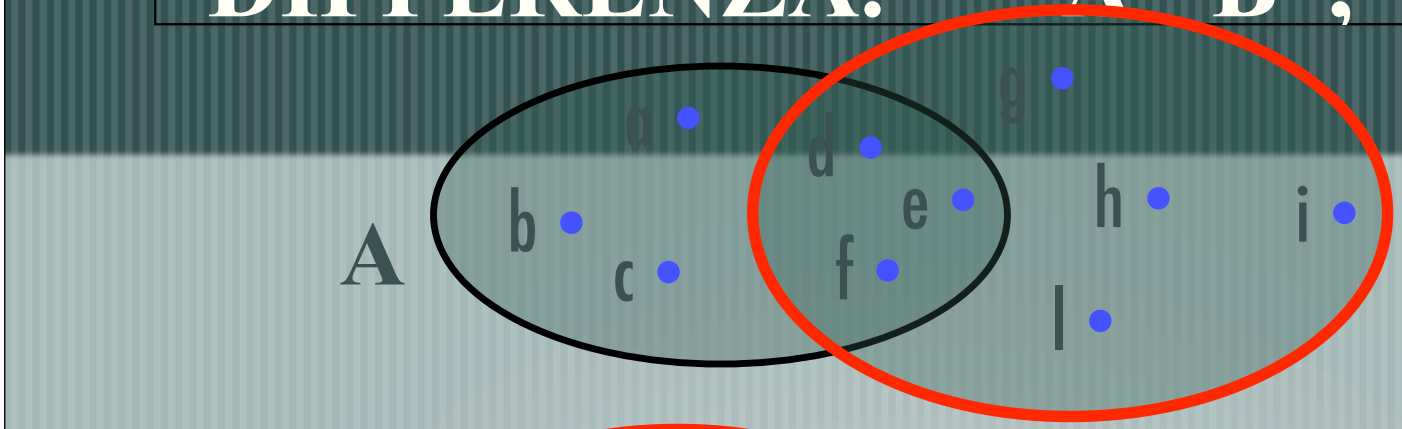


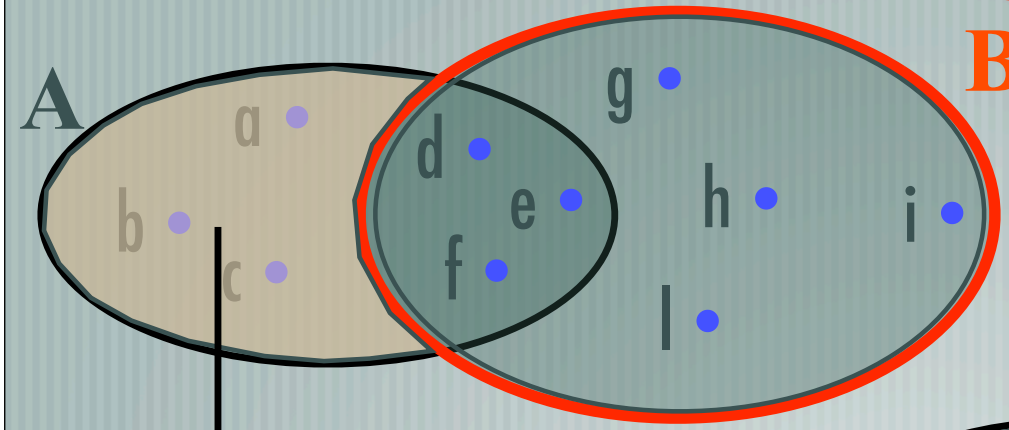
A - B = {a; b; c}

B - A = {g; h; i; l}

info@domenicoperrone.net

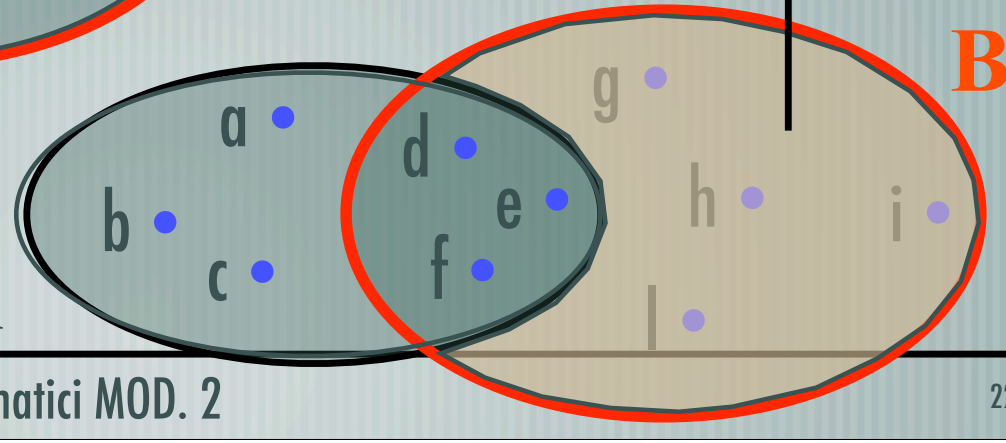
DIFFERENZA. "A - B", "B - A".





A - B = {a; b; c}

B - A = {g; h; i; l}



info@domenicoperrone.net

CASI PARTICOLARI DELLA DIFFERENZA TRA INSIEMI

$A - \varnothing = A$

$A - A = \varnothing$

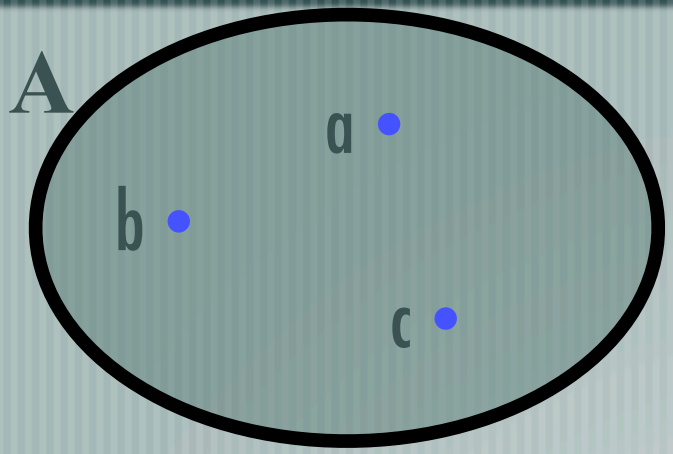
Se $A \cap B = \varnothing$ allora $A - B = A$ e $B - A = B$

Se $B \subseteq A$ allora $B - A = \varnothing$

info@domenicoperrone.net

INSIEME DELLE PARTI "P(A)"

A = {a; b; c;}



Dato un insieme A, l'insieme di tutti i suoi SOTTOINSIEMI propri e impropri, si definisce insieme delle parti di A e si indica con P(A)

L'insieme delle parti di A è:

∅ {a} {b} {c} {a; b} {a; c} {b; c} {a; b; c}

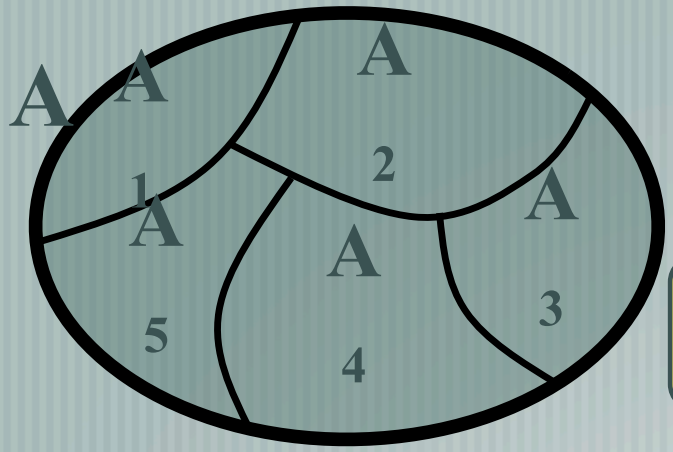
P(A) = { ∅; {a}; {b}; {c}; {a; b}; {a; c}; {b; c}; {a; b; c} }

Gli elementi di P(A) sono INSIEMI

Se A contiene n elementi, P(A) ne contiene 2^n

info@domenicoperrone.net

PARTIZIONE DI UN INSIEME



Si consideri un numero "n" di sottoinsiemi di A.

Si dice che questi sottoinsiemi costituiscono una PARTIZIONE di A se:

1 $A_i \subset A$ e $A_i \neq \emptyset$, $\forall\, i$ ⟹ **Ogni sottoinsieme è proprio**

2 $A_i \cap A_k = \emptyset$ con $i \neq k$ ⟹ **I sottoinsiemi sono a due a due disgiunti**

3 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = A$ ⟹ **L'unione di tutti i sottoinsiemi dà l'insieme A**

info@domenicoperrone.net

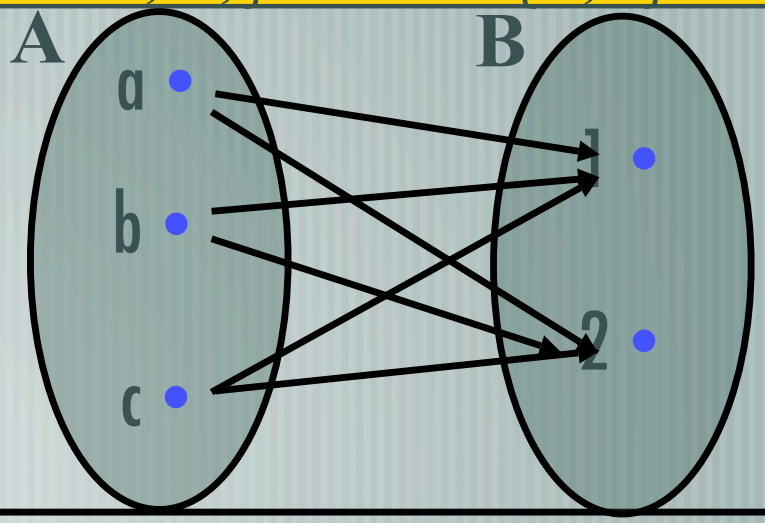
PRODOTTO CARTESIANO

Si definisce prodotto cartesiano di due insiemi A e B, e si indica A x B, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate (x;y) dove il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B

$$A \times B = \{(x;y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Si legge A cartesiano B

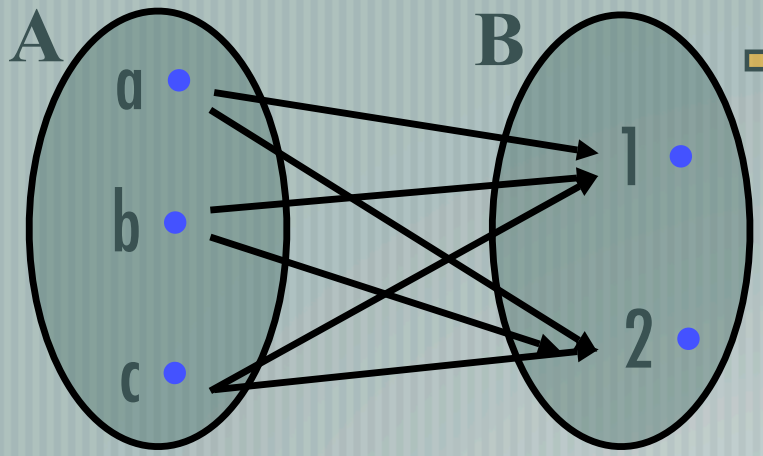
Dati gli insiemi: A = {a; b; c;} e B = {1;2}



$$A \times B = \{ (a;1), (a;2), (b;1), (b;2), (c;1), (c;2) \}$$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEL PRODOTTO CARTESIANO

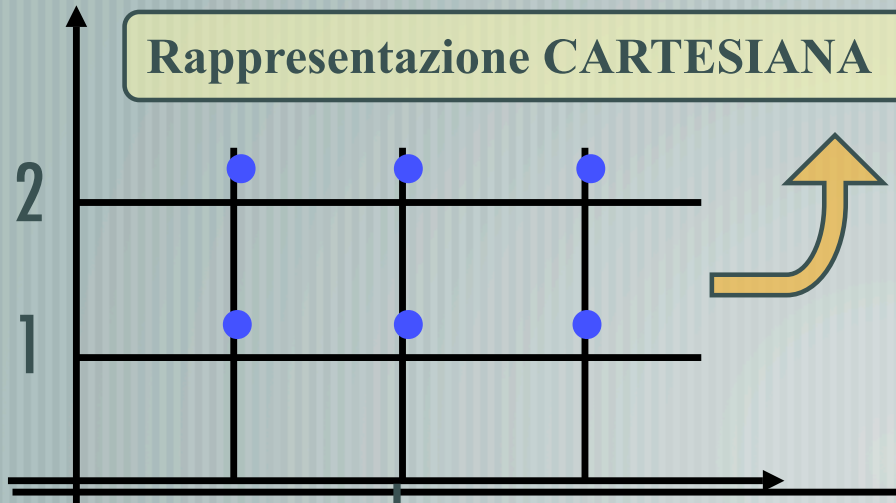
L'insieme A x B = {(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)}
può essere rappresentato graficamente nei seguenti modi:



Rappresentazione SAGITTALE

Rappresentazione mediante tabella a DOPPIA ENTRATA

Rappresentazione CARTESIANA



1	(a;1)	(b;1)	(c;1)
2	(a;2)	(b;2)	(c;2)
B / A	a	b	c

info@domenicoperrone.net

OSSERVAZIONI SUL PRODOTTO CARTESIANO

La coppia (x;y) è diversa dalla coppia (y;x)

Gli elementi dell'insieme cartesiano sono coppie

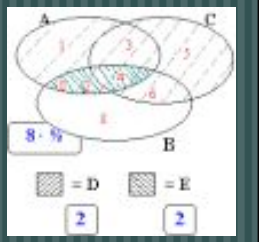
$$A \times A = A^2$$

$$A \times B \neq B \times A$$

Se A e B hanno rispettivamente "n" e "m" elementi, l'insieme A x B possiede "nxm" elementi.

info@domenicoperrone.net

RELAZIONE tra INSIEMI



Se A e B sono insiemi si dice relazione fra A e B , e la si indica con R, un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB:

$$\mathbf{R} \subseteq A \times B$$

La proposizione si scrive anche xRy
e si legge " x e' in relazione con y ".

Se A = B si dice che R è una relazione su A

info@domenicoperrone.net

RELAZIONE tra INSIEMI

Data una relazione R tra due insiemi A e B si dice

dominio di R, e lo si indica D(R), il seguente sottoinsieme di A:

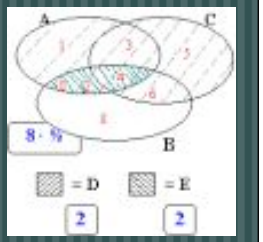
$$\mathbf{D}(\mathbf{R}) = \{ x \in A \ / \ \exists\, y \in B,\ (x,y) \in \mathbf{R} \}$$

codominio di R, e lo si indica C(R), il seguente sottoinsieme di B:

$$\mathbf{C}(\mathbf{R}) = \{ y \in B \ / \ \exists\, x \in A,\ (x,y) \in \mathbf{R} \}$$

info@domenicoperrone.net

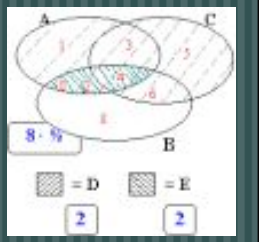
RELAZIONE tra INSIEMI



- Una relazione R si dirà d'ordine se gode delle seguenti proprietà:
  - Riflessiva se $\forall x \in A,\ xRx$
  - Anti-Simmetrica se $((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x = y)$
  - Transitiva se $((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)$

info@domenicoperrone.net

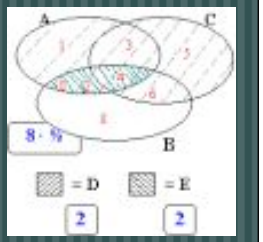
RELAZIONE tra INSIEMI



- Una relazione d'ordine si dice relazione d'ordine totale se vale la seguente proprieta': $\forall x, y \in A, (xRy) \vee (yRx)$
- Un insieme con una relazione d'ordine totale si dice insieme totalmente ordinato.
- L'insieme dei numeri Reali è totalmente ordinato

info@domenicoperrone.net

Applicazioni



Dati due insiemi non vuoti A e B, diremo che una relazione fra A e B è un' applicazione da A a B, e la indicheremo con

$$f : A \longrightarrow B$$

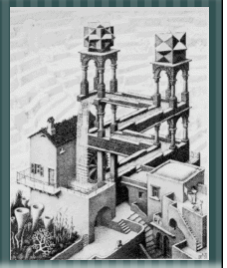
se ogni elemento di A e' in relazione con uno ed un solo elemento di B, cioe' se: $D(f) = A$

$$((x\,f\,y) \wedge (x\,f\,z)) \Rightarrow (y = z)$$

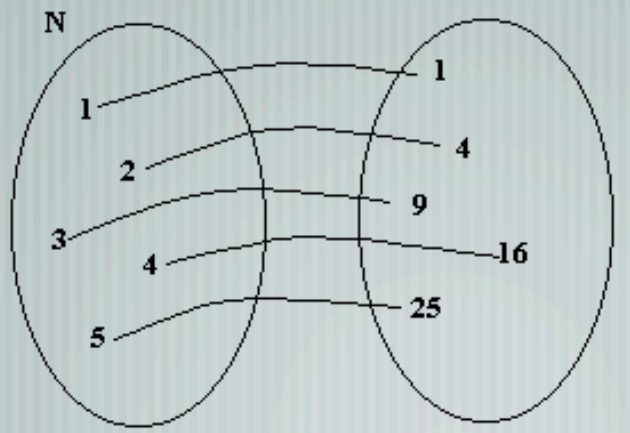
La proposizione xfy si scrive anche y=f(x)

info@domenicoperrone.net

Dall'Insieme al numero

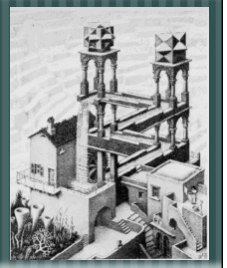


E'proprio il concetto di applicazione, e quindi tutta la teoria degli insiemi che ne ha permesso la genesi, lo strumento con cui possiamo costruire il numero nel senso operativo che gli è proprio.



info@domenicoperrone.net

Dall'Insieme al numero

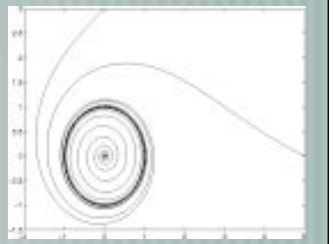


Una delle prime attività matematiche che viene esercitata è il "contare" gli elementi di un dato insieme.
I numeri con cui si conta: 0,1,2,3…. sono i numeri naturali, e vengono indicati con **N**.

È definita in **N** un'operazione, detta *addizione*, che ai numeri naturali *x* e *y,* associa il numero naturale *somma* di *x* e *y*, che si scrive *x+y.*

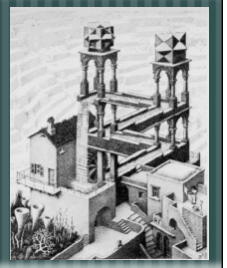
Valgono le seguenti proprietà:

1. $a + b = b + a$ per ogni *a, b* (*proprietà commutativa dell'addizione*);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ per ogni *a, b, c* (*proprietà associativa dell'addizione*);
3. $a + 0 = a = 0 + a$ per ogni *a* (*si dice che il numero naturale 0 è elemento neutro per l'addizione*);
4. $a = b\ a + c = b + c$ (legge di semplificazione)



info@domenicoperrone.net

Dall'Insieme al numero

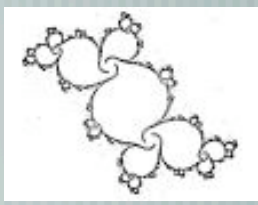


E' definita in **N** anche la *moltiplicazione*, che associa ai numeri *a, b* il numero naturale $a \cdot b$, detto *prodotto* di *a* e *b*.

Valgono le seguenti proprietà:

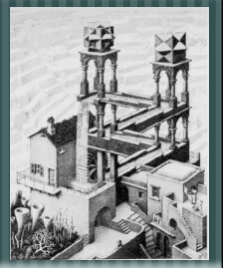
1. $ab = ba$ per ogni a,b (proprietà commutativa);
2. $(ab)c = a(bc)$ per ogni a,b,c (proprietà associativa);
3. $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$, per ogni a (1 è elemento neutro per la moltiplicazione);
4. se almeno uno dei numeri a,b è nullo, tale è pure $a \cdot b$; se $a \cdot b$ è nullo, lo è pure almeno uno dei due numeri a,b;

   in simboli $(a = 0 \;\; b = 0) \;\; (a \cdot b = 0)$ (legge di annullamento del prodotto)
5. se c diverso da 0, $a = b \;\; a \cdot c = b \cdot c$ (legge di semplificazione).



info@domenicoperrone.net

Dall'Insieme al numero



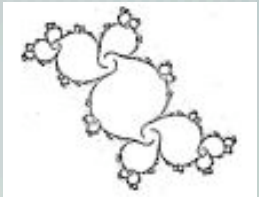
Vi è inoltre in **N** una proprietà che si riferisce alla moltiplicazione e alla addizione:

$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (proprietà *distributiva* della moltiplicazione rispetto all'addizione).

E' la proprietà comunemente usata nella moltiplicazione per esempio di un polinomio per un monomio.

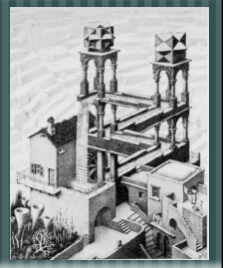
È importante fare attenzione al fatto che, nella legge di semplificazione della moltiplicazione, si suppone $c \neq 0$. Dimenticarsene porta spesso a relazioni assurde (tipo 0=1).

In **N** vi è inoltre un ordinamento totale, nel senso che presi due naturali qualunque è sempre possibile confrontare due elementi e stabilire quale sia il maggiore.



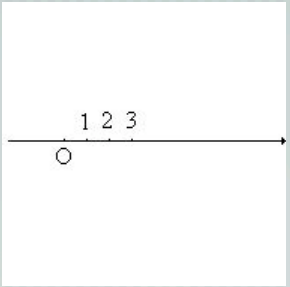
info@domenicoperrone.net

Dall'Insieme al numero

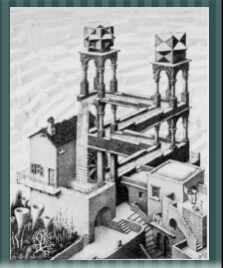


Rappresentazione dei numeri Naturali

Data una retta *r*, fissiamo su di essa un verso. Una retta su cui sia stato fissato un verso si dice orientata. Ora sulla retta orientata *r* fissiamo un punto *O* a cui associamo il numero 0, segniamo poi a ugual distanza l'uno dall'altro i punti *A,B,C,* …. Al numero 1 associamo il punto *A*, al numero 2 il punto *B*, e così via. In tal modo otteniamo una corrispondenza tra l'insieme **N** e i punti della retta *r*. Naturalmente vi sono punti di *r* che non sono immagine di alcun elemento di **N**: fra il punto *O* e il punto *A* c'è almeno un punto *X* di *r*, ma non c'è nessun numero naturale al quale sia associato *X*. I numeri 0, 1, 2, 3, 4, … sono le ascisse rispettivamente dei punti *0, A, B, C, D,* ...



Dall'Insieme al numero



Numeri razionali

I numeri razionali sono quei numeri che si possono scrivere sotto forma di "frazioni", della forma *a/b* con *a*, *b* appartenenti a **Z**, *b* diverso 0. Osserviamo che due frazioni distinte possono rappresentare lo stesso numero.

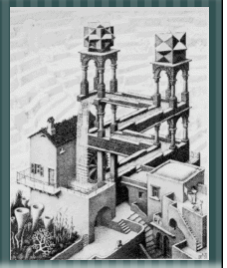
L'insieme di tali numeri si indica con **Q**. In **Q** si può sempre seguire la divisione tra due elementi qualunque, a patto che il secondo sia diverso da zero (Cosa che non era possibile in **Z**)

Eseguendo la divisione fra due interi si possono ottenere o un numero decimale finito o un numero decimale illimitato periodico.

Nell'insieme dei razionali valgono tutte le proprietà viste per i numeri interi, inoltre per ogni elemento di **Q** che sia diverso da zero, esiste un numero razionale che si indica con 1/q o con , detto reciproco di q: tale che q(1/q) =1.

info@domenicoperrone.net

Dall'Insieme al numero



Per evitare cadute di attenzione, possiamo evitare di re-indagare le proprietà delle operazioni dei numeri razionali come abbiamo fatto per i relativi perché di sicura memoria in chi ci ascolta.

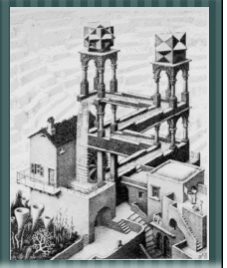
Rappresentazione dei numeri Razionali

Sulla retta orientata *r* fissiamo un punto *O* a cui associamo il numero razionale 0, e un punto *A,* che segue *O* nel verso positivo fissato, a cui associamo 1. Come trovare il punto *B* di *r* da associare al numero razionale assoluto *m/n*? Si tratta di dividere la lunghezza di |*OA*| in *n* parti uguali per poi costruire il multiplo secondo *m* di una di queste parti. *r* si dice l'ascissa di *B*.

Come nel caso dei naturali e degli interi i numeri razionali non "esauriscono" tutti i punti della retta: questo però è un po' più difficile da vedere che non nel caso di **N** e **Z**.

info@domenicoperrone.net

Dall'Insieme al numero

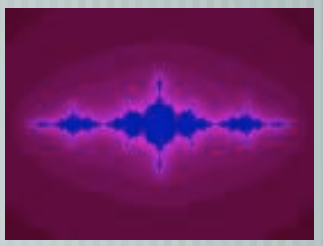


- Confronto ed Ordinamento
- Dal numerare al numerabile

info@domenicoperrone.net

LE STRANEZZE DEGLI INSIEMI INFINITI

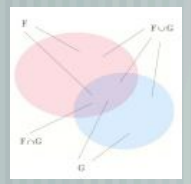
- Possiamo quindi rimandare a qualunque testo universitario di Algebra chi sia interessato ad approfondire, oppure ad un ipertesto con brevi note teoriche, alcuni esempi ed esercizi presente su internet all'url http://www.dm.unibo.it/matematica/AlgebraLineare/diz1/insiemi.htm

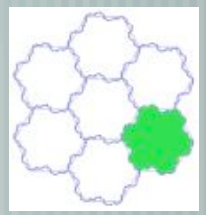


info@domenicoperrone.net

LE STRANEZZE DEGLI INSIEMI INFINITI

- Dopo aver ricordato le principali operazioni con gli insiemi occorrerebbe affrontare le più importanti "patologie" della teoria ingenua degli insiemi.
- Tale attività, necessaria per un carattere completo ed ordinato delle conoscenze di base della matematica, può sicuramente essere trascurato nella formazione iniziale di un soggetto in difficoltà





info@domenicoperrone.net